Herleitung der Vektorrelation

Mittwoch, 22. März 2023 09:56

$$\underbrace{(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})}_{\text{skalarer Operator}}\vec{v}$$

$$= \left(v_x \cdot \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z}\right)\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} v_x\, \partial_x v_x + v_y\, \partial_y v_x + v_z\, \partial_z v_x \\ \text{analog} \\ \end{pmatrix}$$

$$v_x \cdot \frac{\partial}{\partial x} v_x = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x} v_x^2$$

$$\nabla(\vec{v}^2) = \nabla\left(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2\right)$$

$$= \begin{pmatrix} \partial_x (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) \\ \partial_y (\qquad) \\ \partial_z (\qquad) \end{pmatrix}$$

Weiter mit $2x \longrightarrow$ (nur x-Komponente, andere analog)

$$\left[(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v}\right]_x = \underbrace{v_x\, \partial_x v_x}_{} + v_y\, \partial_y v_x + v_z\, \partial_z v_x$$

$$= \frac{1}{2}\partial_x(v_x^2) + \frac{1}{2}\partial_x(v_y^2) + \frac{1}{2}\partial_x(v_z^2) + v_y\, \partial_y v_x + v_z\, \partial_z v_x$$

$$\underbrace{-\frac{1}{2}\partial_x(v_y^2)}_{= -v_y \partial_x v_y} \underbrace{- \frac{1}{2}\partial_x(v_z^2)}_{= -v_z \partial_x v_z}$$

$$= \frac{1}{2}\partial_x\left(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2\right)$$

$$+ v_y \cdot \underbrace{\left(\partial_y v_x - \partial_x v_y\right)}_{} + v_z \underbrace{\left(\partial_z v_x - \partial_x v_z\right)}_{}$$

$$+ \; v_y \cdot \underbrace{\left(\partial_y v_x - \partial_x v_y \right)}_{= -(\vec{\nabla} \times \vec{v})_z} + v_z \underbrace{\left(\partial_z v_x - \partial_x v_z \right)}_{= (\vec{\nabla} \times \vec{v})_y}$$

$$= \frac{1}{2} \partial_x (\vec{v}^2) - \Big(\underbrace{v_y (\mathrm{rot}\,\vec{v})_z - v_z (\mathrm{rot}\,\vec{v})_y}_{} \Big)$$

$$= \frac{1}{2} \partial_x (\vec{v}^2) - \left(\vec{v} \times \mathrm{rot}\,\vec{v} \right)_x \quad \blacksquare \qquad \text{q.e.d.}$$