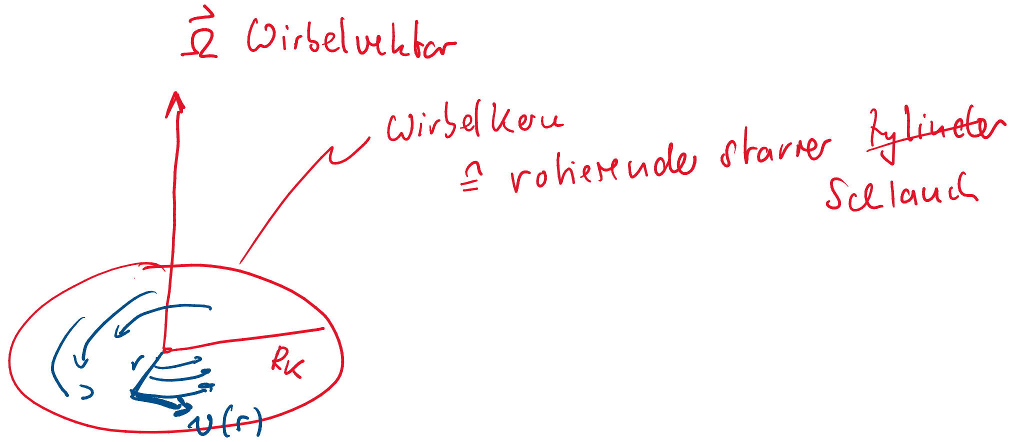
Vertiefungen zu Physik II - Woche 4

Dienstag, 14. März 2023 16:38

Wirbel



"starre Körper" $\quad v(r) = r\Omega$

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{2}\,\mathrm{rot}\,\vec{v}$$

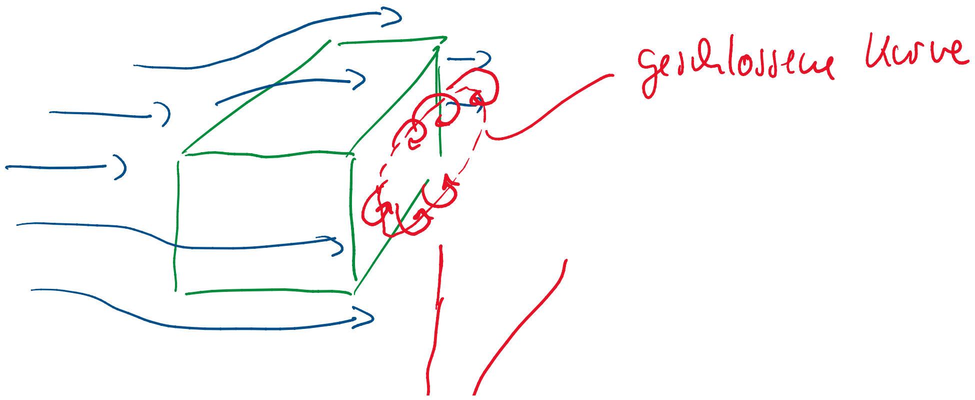
Zirkulation $\quad Z = \oint_C \vec{v}(\vec{r})\, d\vec{s}$

Wirbelstärke := Z wobei C den gesamten Kern umschliesst

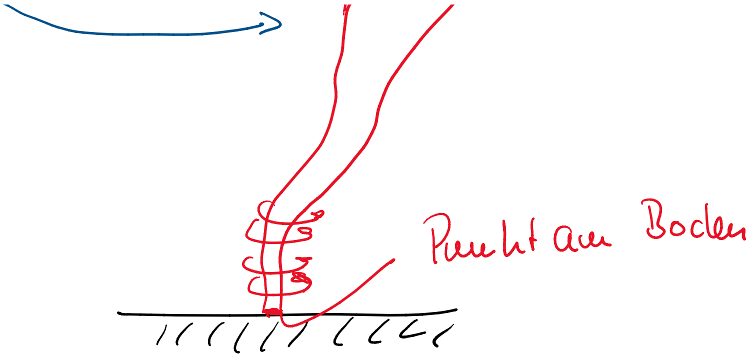
$$Z = \oint_{r \geq R_K} \vec{v}\, d\vec{s} = 2\Omega A = 2\pi R_K^2 \Omega$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{div}\,\vec{\Omega} = \frac{1}{2}\,\underbrace{\mathrm{div}\,(\mathrm{rot}\,\vec{v})}_{=0} \quad \Rightarrow$$ Wirbel hat keine Quelle

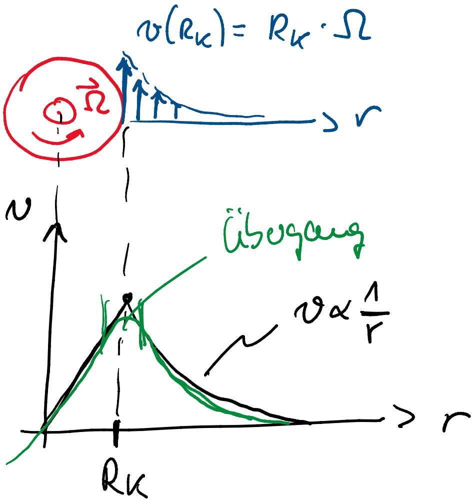
Wirbelschlauch beginnt auf Grenzfläche oder hat geschlossene Kurve



Tornado



Zirkulationsgebiet:

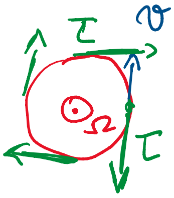


$r > R_K$: Γ unabhängig von r außerhalb des Kerns!

$$\text{konst.} = \Gamma = \oint_{\substack{C \\ r > R_K}} \vec{v} \cdot \vec{ds} = v(r)\, 2\pi r \quad \Rightarrow \quad v(r) = \frac{\Gamma}{2\pi r}$$

im Zirkulationsgebiet.

Energieverlust durch Reibung



Scherspannung $\Rightarrow$ Drehmoment $\vec{M}$

$$\tau = \eta \nabla v = \eta \frac{\partial}{\partial r} v(r) = -\frac{\eta}{2\pi} \frac{\Gamma}{r^2} = -\frac{\eta \Gamma}{\underbrace{2\pi R_K^2}} = -\eta \Omega$$

$$\Gamma = 2\pi R_K^2 \Omega$$

$$M = R_K \underbrace{A_{Zyl}}_{\text{Zylinderoberfläche}} \tau = R_K \cdot 2\pi R_K \cdot \underbrace{\ell}_{\text{"Länge des Wirbels"}} \tau \quad (*)$$

$$M = \underbrace{I}_{\text{Trägheitsmoment}} \dot{\Omega} = \underbrace{\tfrac{1}{2} m R_K^2}_{I_{Zyl}} \dot{\Omega} = \tfrac{1}{2} \rho \pi R_K^2 \ell R_K^2 \dot{\Omega} \quad (**)$$

$(* = **)$ $$2\pi R_K^2 \ell \tau = -2\pi R_K^2 \ell \eta \Omega$$

$$L = \tfrac{1}{2} \pi R_K^4 \ell \rho \dot{\Omega}$$

$$\dot{\Omega} \propto \Omega \Rightarrow \Omega = \Omega(0)\, e^{-t/\tau}$$ Zeitkonstante τ

$$\dot{\Omega} = -\frac{1}{\tau} \Omega$$

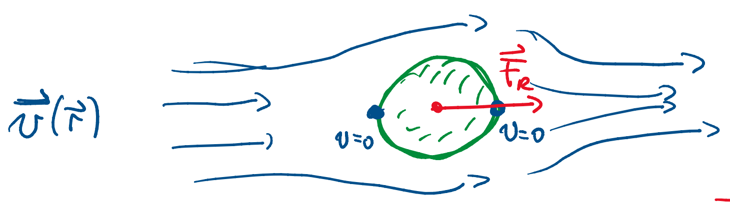
$$\Rightarrow \tau = \frac{\tfrac{1}{2} \cancel{\pi} R_K^{\cancel{4}\,2} \cancel{\ell} \rho}{2 \cancel{\pi} \cancel{R_K^2} \cancel{\ell} \eta} = \boxed{\frac{R_K^2}{4} \frac{\rho}{\eta} = \tau}$$

<u>Energie</u> $$E_{rot} = \frac{1}{2} I \Omega^2 = \frac{1}{4} m R_K^2 \Omega^2$$

$$= \frac{1}{4} \rho \pi R_K^2 \ell R_K^2 \Omega^2 \qquad Z = 2\pi R_K^2 \cdot \Omega$$

$$= \boxed{\frac{1}{16\pi} \rho \ell Z^2 = E_{rot}}$$

Dynamischer Auftrieb:

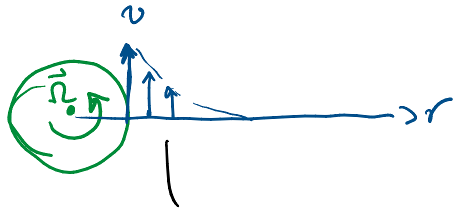


$$\vec{F}_R = c_w \frac{1}{2} \rho v^2 A$$

$\vec{F}_R = c_w \frac{1}{2} \rho v^2 A$

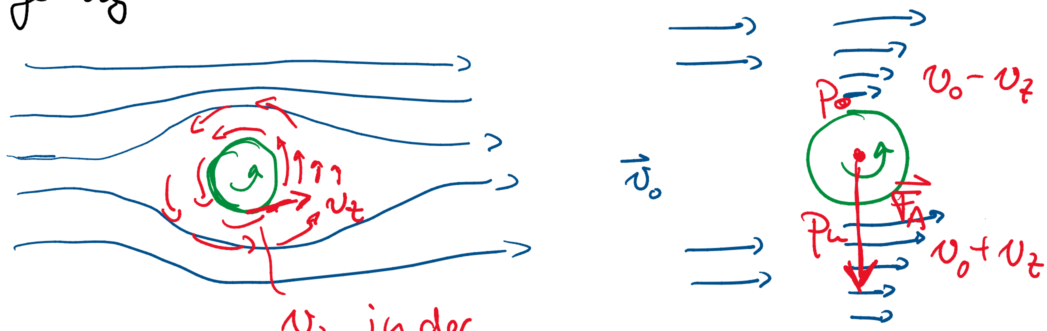
Widerstandsbeiwert

Rotation des Zylinders



Zirkulationsgebiet $v(r) \sim \frac{1}{r}$

Überlagerung:



v_z in der Grenzschicht

$p_{stat} = p_0 - \frac{1}{2} \rho v^2$

$p_o > p_u$

Dynamischer Auftrieb: $F_A \cong (p_o - p_u) A$

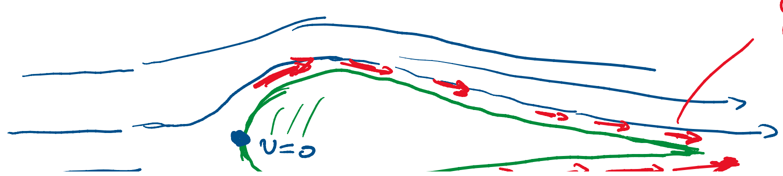
Querkraft aufgrund Rotation

Magnus-Effekt

Jacques Cousteau: Alcyone (Antrieb über rotierende Zylinder)

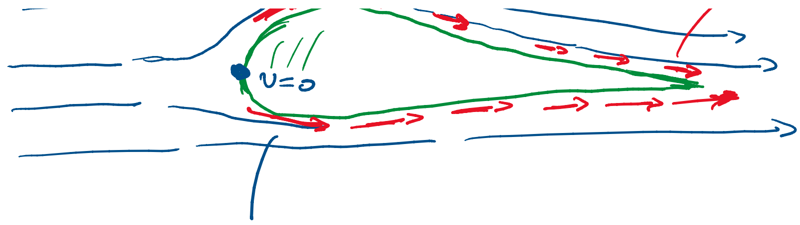
Symmetriebruch: Tragflächenprofil

Start $v \simeq 0$

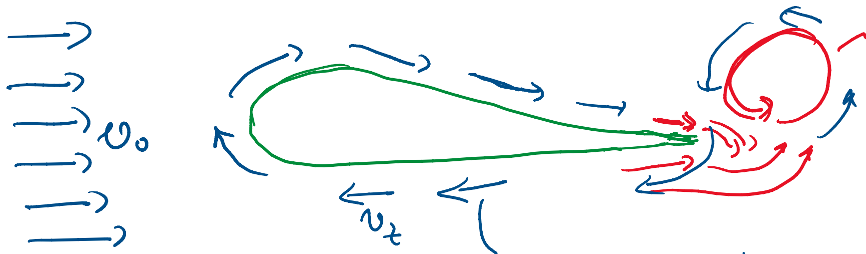


Geschwindigkeit kleiner (Reibung, Weg)

Start
$v \approx 0$

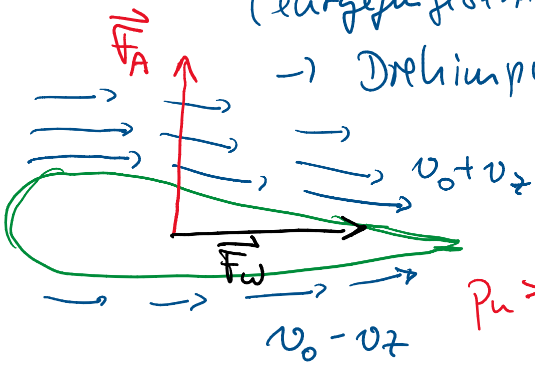


laminare Umströmung
(Stokes'scher Bereich)



Anfahrwirbel

Zirkulationsströmung
(entgegengesetzt dem Wirbel
→ Drehimpuls des Gases erhalten!)



$p_u > p_o$

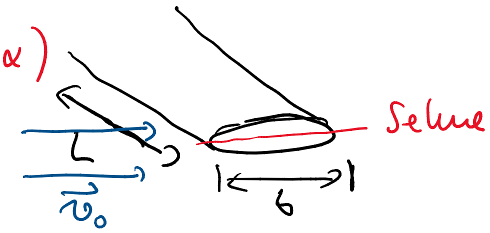
Abschätzung der Kräfte:

$$Z = \oint_C \vec{v}_z \cdot \vec{ds}$$

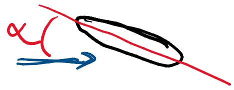
$$\approx v_z \cdot 2b \cdot f(b,\alpha)$$

Korrekturfunktion

C = Umrandung der Tragfläche
$\approx 2b$



Sehne



Anstellwinkel

Bernoulli

$$\boxed{F_A \doteq c_A \frac{1}{2} \rho \left(v_u^2 - v_{ob}^2\right) A}$$

c_A = Auftriebsbeiwert

$v_u \approx v_0 - v_z$
$v_{ob} \approx v_0 + v_z$

$F_A = c_A \frac{1}{2}\rho \cdot 4 v_0 v_z A$

A Fläche der Tragfläche

$A = L \cdot b$

$= \underbrace{c_A \, 2 v_z \cdot b}_{\propto Z} \, L v_0 \rho \quad (c_A = f(b, \alpha))$

$$\boxed{F_A = Z L v_0 \rho}$$

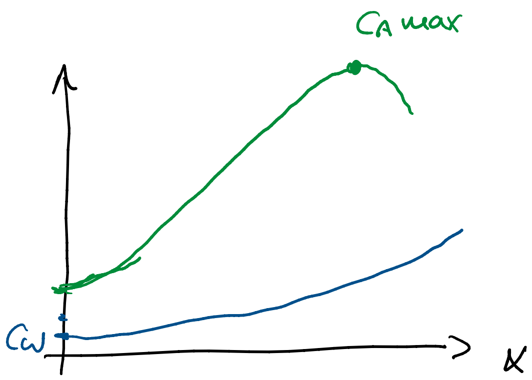
Kutta - Joukowski - Formel

$c_A = c_A(\alpha)$

$c_W = c_W(\alpha)$

$F_W = \frac{1}{2}\rho v^2 c_W \cdot A$

↑ Tragfläche $L \cdot b$!



$F_A = c_A \frac{1}{2}\rho v^2 A$

$F_W = c_W \frac{1}{2}\rho v^2 A$