Anwendungen der FT

Raum, Zeit $f(x)$ $\circ\!\!-\!\!\bullet$ $F(k)$ reziproke Raum

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(k)\, e^{ikx}\, dk \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-ikx}\, dx$$

Ursprung beliebig! Ursprung definiert!

Verschiebungssatz: $f(x) \rightarrow f(x-x_0)$

$$\tilde{F}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-x_0)\, e^{-ikx}\, dx \qquad \tilde{x} = x - x_0 \qquad d\tilde{x} = dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tilde{x})\, e^{-ik(\tilde{x}+x_0)}\, d\tilde{x}$$

$$= e^{-ikx_0} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tilde{x})\, e^{-ik\tilde{x}}\, d\tilde{x} = \boxed{e^{-ikx_0}}\, F(k)$$

Verschiebung der x-Achse $\Rightarrow$ Phasenfaktor e^{-ikx_0}

FT der Gauss-Funktion

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_x}\, e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma_x^2}}$$

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_x}\, e^{-ikx_0} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}}\, e^{-ikx}\, dx$$

Exponent: $$-\frac{x^2}{2\sigma_x^2} - ikx = \frac{-1}{2\sigma_x^2}\left(x^2 + 2\,\underbrace{ik\sigma_x^2}_{=:b}\, x\right)$$

$$= -\frac{1}{2\sigma_x^2}\left(x^2 + 2bx + b^2 - b^2\right) = -\frac{(x-(-b))^2}{2\sigma_x^2} + \underbrace{\frac{b^2}{2\sigma_x^2}}_{\text{unabh. von } x}$$

$$\Rightarrow F(k) = \frac{1}{\ldots}\, e^{-ikx_0} \int e^{-\frac{(x+b)^2}{2\sigma_x^2}}\, e^{\frac{b^2}{2\sigma_x^2}}\, dx$$

$$\Rightarrow \quad F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_x}\, e^{-ikx_0} \underbrace{\int e^{-\frac{(x+b)^2}{2\sigma_x^2}}\, e^{\frac{b^2}{2\sigma_x^2}}\, dx}_{\sqrt{2\pi}\,\sigma_x \; e^{\frac{b^2}{2\sigma_x^2}}}$$

$$= \frac{1}{\cancel{\sqrt{2\pi}\,\sigma_x}}\, e^{-ikx_0}\, \cancel{\sqrt{2\pi}\,\sigma_x}\; e^{\frac{b^2}{2\sigma_x^2}} \qquad b = ik\sigma_x^2$$

$$= e^{-ikx_0}\, e^{-\frac{k^2\sigma_x^4}{2\sigma_x^2}} = \boxed{e^{-ikx_0}\, e^{-\frac{k^2}{2\sigma_x^{-2}}} = F(k)}$$

FT der Gaussfunktion ist eine Gaussfunktion mit

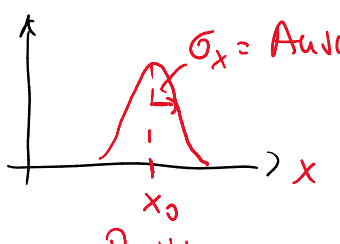
Breite $\boxed{\sigma_k = \frac{1}{\sigma_x}}$!

<u>Zeit:</u> $\sigma_\omega = \frac{1}{\sigma_t} \Rightarrow \sigma_\omega \sigma_t \overset{\text{Realität}}{\geq} 1$ Zeit-Bandbreite-Produkt. (Fourier-Limit)

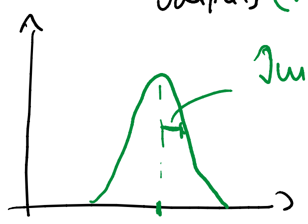
<u>Unschärferelation:</u>

Impuls $p \overset{\text{de Broglie}}{=} \frac{h}{\underset{\text{Wellenlänge}}{\lambda}} = \frac{h}{2\pi}\underbrace{\frac{2\pi}{\lambda}}_{=k} = \hbar k$

Teilchen



Impuls (verteilung)



$$\underset{\text{Ortsunschärfe}}{\sigma_x} \cdot \underset{\text{Impulsunschärfe}}{\sigma_p} = \sigma_x \cdot \hbar\sigma_k = \hbar$$

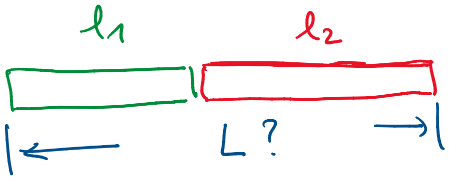
Heisenberg'sche Unschärferelation: $\boxed{\sigma_x \cdot \sigma_p \geq \hbar}$

Heisenberg'sche Unschärferelation

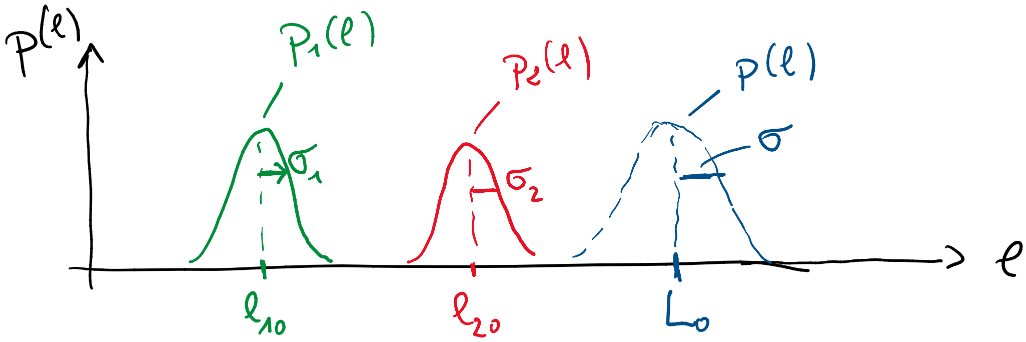
(Wellenpakete)

Faltung und Faltungstheorem

Bsp: 2 Sätze von Stäben 1 und 2



$L = l_1 + l_2$



$$p_1(l) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_1}\, e^{-\frac{(l-l_{10})^2}{2\sigma_1^2}}$$

p_2 analog

$$p(L) = \int_{-\infty}^{\infty} p_1(l_1)\, p_2(L-l_1)\, dl_1$$

└ Integration über alle möglichen Werte l_1

Definition:

$$\boxed{h(y) := f * g = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, g(y-x)\, dx}$$

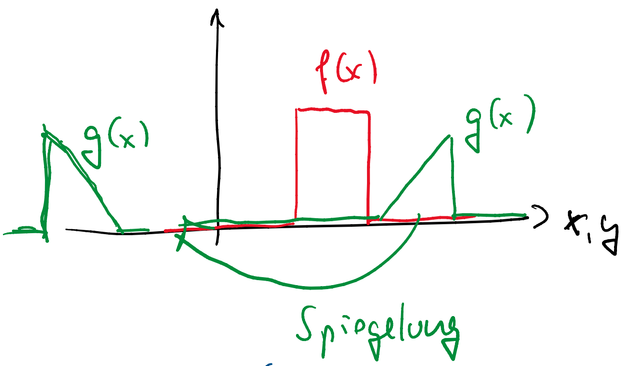
Faltung, Faltungsintegral (engl. convolution)

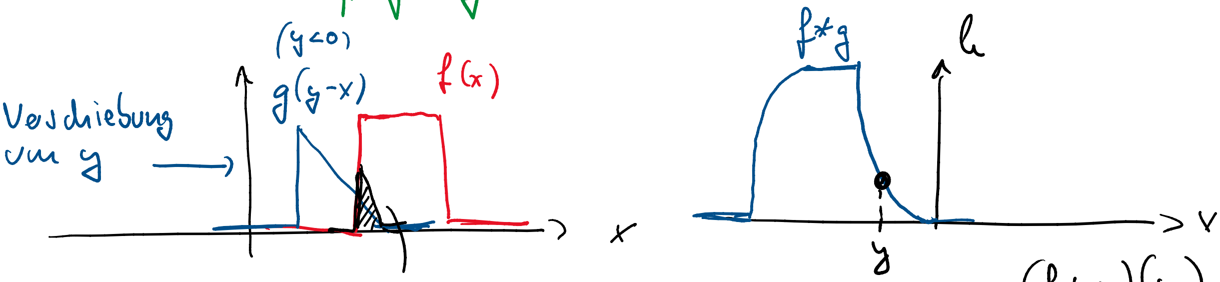
wichtig für · Übertragungsfunktion

wichtig für
- Übertragungsfunktion
- Auflösungsvermögen (Mikroskop, Spektrometer)
- DGL
- etc.

"Graphische" Faltung

$$f * g = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, g(y-x)\, dx$$





Multiplikation → Integration ⇒ $(f*g)(y)$

Eigenschaften:

kommutativ $\quad f * g = g * f$

1-Element: $\quad (f * \delta)(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \delta(y-x)\, dx = f(y)$

= δ-Distribution

Faltungstheorem

Faltung wichtige Operation aber mühsam zu berechnen

$h = f * g \qquad$ FT bzgl y auf beiden Seiten:

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(y)\, e^{-iky}\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, g(y-x)\, dx \; e^{-iky}\, dy$$

vertauschbar

Annahme: Integrationen vertauschbar

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} g(y-x)\, e^{-iky}\, dy}_{G(k)\, e^{-ikx}}\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\quad G(k)\, e^{-ikx}\, dx$$

$$= \boxed{G(k)\cdot F(k) = H(k)}$$

Faltungstheorem

Der Faltung entspricht im Fourier-Raum die Multiplikation.

Faltung und Multiplikation Fourier-Paar

Faltung zweier Gaussfunktionen

Stäbe: $p_1(\ell) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_1}\, e^{-\frac{(\ell-\ell_{10})^2}{2\sigma_1^2}}$ $\quad p_2$ analog

$$\mathcal{F}[p_1] = P_1(k) = e^{-\frac{k^2\sigma_1^2}{2}}\, e^{-ik\ell_{10}}$$

$$\mathcal{F}[p_2] = P_2(k) = e^{-\frac{k^2\sigma_2^2}{2}}\, e^{-ik\ell_{20}}$$

$$\mathcal{F}[p] = P(k) = P_1\cdot P_2 = e^{-\frac{k^2}{2}(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}\, e^{-ik(\ell_{10}+\ell_{20})}$$

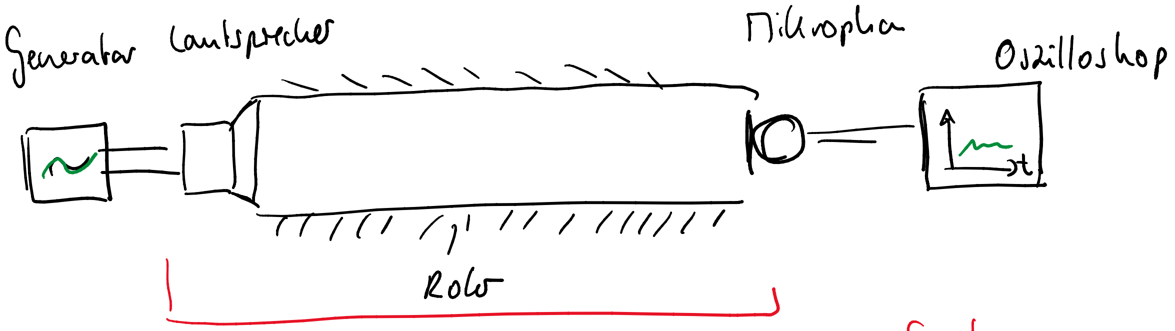
$$\Rightarrow\quad p(L) = \mathcal{F}^{-1}[P] = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}} \exp\left\{-\frac{(L-(\ell_{10}+\ell_{20}))^2}{\underbrace{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}_{\text{Breite}}}\right\}$$

Faltung von 2 Gaussfunktion liefert Gauss

Mittelwert $l_{10}+l_{20} = L_0$

Breite $\boxed{\sigma = \sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}$ (Fehlerrechnung!)

Anwendung Systemanalyse



Interessiert am Frequenzverhalten dieses Systems

Übertragsfunktion $g(t)$

Signal $h(t) = f*g$

$f(t)$ $\qquad$ $g(t)$

$F(\omega)$ $\qquad$ $G(\omega)$ $\qquad$ $H(\omega) = F(\omega)\, G(\omega)$