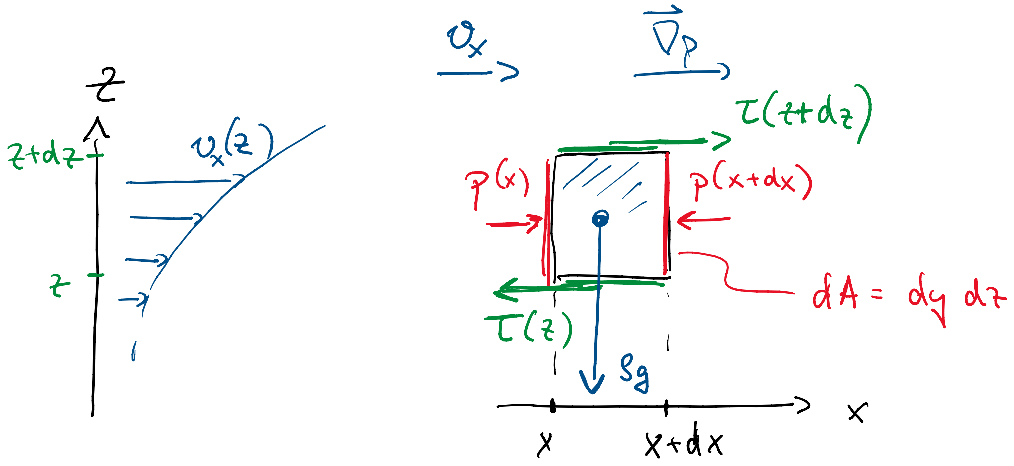
Hydrodynamische Bewegungsgleichungen

Volumenelement dV in Strömungsfeld $\vec{v}(\vec{r})$



Oberflächenkräfte:

Druckkraft $\quad (d\vec{F}_p)_x = - \dfrac{p(x+dx) - p(x)}{dx}\, dx\, \underbrace{dA}_{dy\,dz} = -\nabla_x p\, dV$

Reibung $\quad (d\vec{F}_R)_x = \dfrac{\tau(z+dz) - \tau(z)}{dz}\, dz\, \underline{dx\, dy} =$

$$= \nabla_z \tau\, dV = \eta \frac{\partial^2}{\partial z^2} v\, dV = \eta\, \nabla_z^2 v\, dV$$

$$\tau = \eta\, \nabla v = \eta \frac{\partial v}{\partial z}$$

Volumenkräfte: Schwerkraft, Trägheitskräfte (z.B. Zentrifuge)

$$(d\vec{F}_{vol})_x = f_x\, dV \qquad \vec{f} \text{ Kraftdichte} \overset{\text{zB}}{=} \rho \vec{g}$$

in Vektorschreibweise

$$d\vec{F} = -\nabla p\, dV + \eta\, \Delta \vec{v}\, dV + \vec{f}\, dV$$

Beschleunigung:

$$d \ldots \frac{\partial \vec{v}}{\ldots} \ldots \frac{\partial \vec{v}}{\ldots} dx + \frac{\partial \vec{v}}{\ldots} dy + \frac{\partial \vec{v}}{\ldots} dz$$

Gesamtänderung:

$$\frac{d}{dt}\vec{v} = \underbrace{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}}_{\text{explizit}} + \underbrace{\frac{\partial \vec{v}}{\partial x}\underbrace{\frac{dx}{dt}}_{v_x} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y}\underbrace{\frac{dy}{dt}}_{v_y} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z}\underbrace{\frac{dz}{dt}}_{v_z}}_{\text{konvektiv}}$$

$$= \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v}$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\rho \frac{d\vec{v}}{dt}}_{\text{Änderung Impulsdichte}} = \frac{d\vec{F}}{dV} = -\nabla p + \eta \Delta\vec{v} + \vec{f}$$

$$\Rightarrow \quad \rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v}$$

$$= \rho\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \underbrace{\rho \tfrac{1}{2}\vec{\nabla}(v^2)}_{\substack{\text{Schnelligkeit}\\ \text{laminarer Anteil}}} - \underbrace{\rho\, \vec{v}\times(\vec{\nabla}\times\vec{v})}_{\substack{\vec{v}\times \mathrm{rot}\,\vec{v}\\ \text{Wirbel}}}$$

$$\boxed{\rho\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2}\vec{\nabla}v^2 - \vec{v}\times \mathrm{rot}\,\vec{v}\right) = -\vec{\nabla}p + \vec{f} + \eta\Delta\vec{v}}$$

Navier-Stokes-Gleichung
(für inkompressible Flüssigkeiten)

Erinnerung: $\boxed{Re = \frac{\rho v \ell}{\eta}}$ $\quad \ell =$ typ. Dimension, $v =$ mittlere Schnelligkeit

ausklammern $\Rightarrow$ Gleichung dimensionslos (Einheitsvektoren)

Zwei Strömungen mit gleichen Reynoldszahlen ergeben dasselbe Strömungsfeld

$\Rightarrow$ Ähnlichkeitstransformationen.

<u>Anwendung:</u> Potentialströmung $\Rightarrow$ $\operatorname{rot}\vec{v} = 0$

$\Rightarrow$ reibungsfrei $\eta = 0$ (Euler-Gleichung)

stationäres Feld: $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$

$$\frac{1}{2}\rho\,\nabla v^2 = -\nabla p + \vec{f} \qquad \vec{f} = \rho\vec{g} = -\nabla(\rho g h)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\rho\,\nabla v^2 = -\nabla p - \nabla(\rho g h)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2}\rho\,\nabla v^2 + \nabla p + \nabla(\rho g h)\right)\cdot d\vec{r} = 0$$

$$\Rightarrow \nabla\left(\frac{1}{2}\rho v^2 + p + \rho g h\right)\cdot d\vec{r} = 0$$

$$\Rightarrow d\underbrace{\left(\frac{1}{2}\rho v^2 + p + \rho g h\right)}_{=\text{konstant}} \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \text{Bernoulli-Gleichung.}$$

<u>Anwendung:</u> Wirbel

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2}\nabla v^2 - \vec{v}\times\operatorname{rot}\vec{v} = \frac{1}{\rho}\nabla p + \frac{1}{\rho}\vec{f} + \frac{\eta}{\rho}\nabla^2\vec{v}$$

Rotation auf beiden Seiten

links: $$\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\operatorname{rot}\vec{v}}_{=2\vec{\Omega}} + \underbrace{\frac{1}{2}\operatorname{rot}(\nabla v^2)}_{=0} - \operatorname{rot}\left(\vec{v}\times\underbrace{\operatorname{rot}\vec{v}}_{=2\vec{\Omega}}\right)$$

$$= 2\frac{\partial}{\partial t}\vec{\Omega} - 2\vec{\nabla}\times(\vec{v}\times\vec{\Omega}) \qquad \vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$$

$$= 2\frac{\partial}{\partial t}\vec{\Omega} - 2\vec{v}\underbrace{(\vec{\nabla}\cdot\vec{\Omega})}_{\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{v}) = 0} + 2\underbrace{(\vec{\nabla}\cdot\vec{v})}_{\operatorname{div}\vec{v} = 0 \text{ falls Kontinuitätsgleichung gilt}}\vec{\Omega}$$

$$= 2\frac{\partial}{\partial t}\vec{\Omega}$$

$$= 2 \frac{\partial}{\partial t} \vec{\Omega}$$

rechts: $$-\frac{1}{\rho} \underbrace{\operatorname{rot}(\nabla p)}_{=0} + \frac{1}{\rho} \underbrace{\operatorname{rot} \vec{f}}_{\substack{=0 \text{ wenn} \\ \vec{f} \text{ konservativ}}} + \frac{\eta}{\rho} \operatorname{rot}(\nabla^2 \vec{v})$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial}{\partial t} \vec{\Omega} = \frac{1}{2} \frac{\eta}{\rho} \operatorname{rot}(\nabla^2 \vec{v})}$$

Stabilität des Wirbels: $Z(t) \sim \Omega(t)$

$$\dot{\Omega} \sim \frac{\eta}{\rho} \mathrel{\hat{=}} \frac{\text{Zähigkeit}}{\text{Trägheit}}$$

$$\eta = 0: \quad \frac{d\vec{\Omega}}{dt} = \frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{\Omega} = \underbrace{(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})}_{\text{nur konvektiv}} \vec{\Omega}$$

Wirbel bewegt sich aber $Z, |\vec{\Omega}|$ zeitlich konstant.

1. Helmholtzscher Wirbelsatz

Wirbelstärke Z konstant

$Z = 2 \Omega A$ ist "Konstante der Bewegung" (Erhaltungsgrösse)

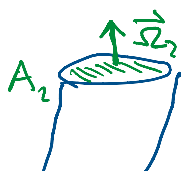
Massenelement im Wirbel verbleibt im Wirbel

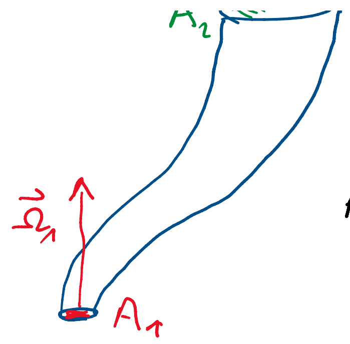
2. Helmholtzscher Wirbelsatz

Drehimpuls $\Rightarrow$ $$\vec{L} = I \vec{\Omega} = \frac{1}{2} m R_K^2 \vec{\Omega} = \frac{m}{2\pi} \underbrace{\pi R_K^2}_{A} \vec{\Omega} = \frac{m}{2\pi} A \cdot \vec{\Omega}$$

$|\vec{L}| \sim Z$ Erhaltungsgrösse

Entlang Wirbelschlauch ist $A \cdot \Omega$ Erhaltungsgrösse:





$$A_1 \Omega_1 = A_2 \Omega_2$$

Spezielle "Funktionen" (Distributionen)

Problem: mathematische Darstellung einer Punktladung (Punktmasse)

räumliche Ausdehnung 0 } Dichte dort ∞
endliche Masse, Ladung, … } sonst 0

bei $\vec{r}_0$ $\qquad \rho(\vec{r}) = \begin{cases} \infty & \text{wenn } \vec{r} = \vec{r}_0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Dirac'sche δ-Distribution

Def: Funktion angewandt auf Testfunktion f

$$\boxed{\delta[f] \qquad \int_{\text{Definitionsbereich}} \delta(x)\, f(x)\, dx = f(0)}$$

konkrete:

$$\int_a^b \delta(x - x_0)\, f(x)\, dx = \begin{cases} f(x_0) & \text{falls } x_0 \in [a,b] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Punktmasse bei $\vec{r}_0$, Masse m $\qquad \rho(\vec{r}) = \delta(\vec{r} - \vec{r}_0)\, m$

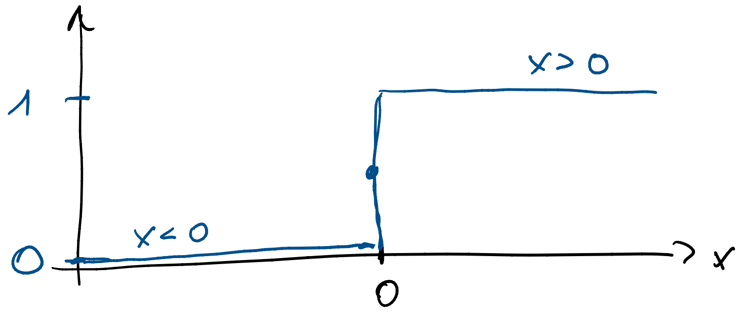
$$m_V = \int_V \rho(\vec{r}) \cdot dV = \begin{cases} m & \text{wenn } \vec{r}_0 \text{ in } V \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$m_V = \int_V \delta(\vec{r}) \cdot dV = \{ 0 \quad \text{sonst}$$

"Standard- Impuls"

Heaviside - Funktion

"Standard - Sprung"



$$\Theta(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$$