Faltung:

$$(f * g)(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, g(\tau - t)\, dt$$

$$\mathcal{F}[f*g] = \mathcal{F}[f] \cdot \mathcal{F}[g] \qquad \text{Faltungstheorem}$$

Lösung inhomogene DGL:

Poisson-Gleichung: $\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}$ mit $\vec{E} = -\operatorname{grad} \phi(\vec{r})$

$$\Rightarrow \quad -\operatorname{div}\operatorname{grad}\phi = -\sum_i \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i^2} = \boxed{-\underbrace{\Delta}_{\text{Laplace-Op.}}\phi = \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}}$$

Poisson-Glu.

$$\Rightarrow \quad \rho(\vec{r}) = \int \rho(\vec{r}\,')\, \delta(\vec{r} - \vec{r}\,')\, \underbrace{d^3 r'}_{d\vec{r}\,'}$$

$$\Delta\phi = -\frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0} = -\frac{1}{\varepsilon_0} \int \rho(\vec{r}\,')\, \delta(\vec{r} - \vec{r}\,')\, d^3 r'$$

Poisson-Glu für Punktladung bei $\vec{r}\,'$

$$\Delta G(\vec{r}, \vec{r}\,') = -\frac{1}{\varepsilon_0}\, \delta(\vec{r} - \vec{r}\,')$$

"Standlösung für eine δ-Inhomogenität"
"Standardimpulsantwort"

$\uparrow$ Green'sche Fn.

Lösung: $$G(\vec{r}, \vec{r}\,') = \frac{-1}{4\pi\varepsilon_0\, |\vec{r} - \vec{r}\,'|}$$ Potential einer Punktladung

Für beliebiges $\rho(\vec{r})$:

$$\Delta\phi = -\frac{\rho(\vec{r})}{\ldots} \qquad (*)$$

Für beliebiges ρ:

$$\Delta\phi = -\frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0} \quad (*)$$

$$-\Delta_{\vec{r}} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = -\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')$$ Faltung mit $\rho(\vec{r})$

$$\Rightarrow -\int\left(\Delta_{\vec{r}} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right)\rho(\vec{r}\,')\, d^3r' = -\frac{1}{\varepsilon_0}\int \delta(\vec{r}-\vec{r}\,')\rho(\vec{r}\,')\, d^3r'$$

vertausche

$$\Rightarrow \Delta_{\vec{r}} \underbrace{\int \frac{-\rho(\vec{r}\,')}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\, d^3r'}_{\phi(\vec{r}) = \int \rho(\vec{r}\,')\, G(\vec{r}-\vec{r}\,')\, d^3r'} = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\vec{r}) \quad (**)$$

"Rezept:" Löse DGL für δ-Inhomogenität
"Green'sche Funktion"
$\Rightarrow$ Lösung beliebige Inhomogenität durch Faltung der Greenschen Fu. mit Inhomogenität

Korrelation

$$\boxed{\langle\langle f,g\rangle\rangle(\tau) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, g(t+\tau)\, dt}$$

Korrelationsintegral

Mass für die "Ähnlichkeit" und den "Abstand" der Funktionen auf der t-Achse.

Anwendungen:
- Statistik ("Korrelationen")
- Messungen von Diffusionskonstanten
- Messungen von kurzen Pulsen

konjugiert kompl.

$$\mathcal{F}[\langle\langle f,g\rangle\rangle] = \mathcal{F}[f] \cdot \mathcal{F}[g]^*$$

Korrelationstheorem: $\boxed{\mathcal{F}[\langle\langle f, g\rangle\rangle] = \mathcal{F}[f] \cdot \mathcal{F}[g]^*}$ konjugiert

Laplace-Transformation und DGL

Def: $$\mathcal{L}[f] := \int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, dt$$

Laplace-Transformierte

$t \longrightarrow s \quad [s] = \frac{1}{[t]}$

$s \in \mathbb{C}$

"Anfangsbedingungen" bei $t=0$ endlich und bekannt

$\mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}\right]$?

P.I.:

$u' = \frac{df}{dt} \qquad u = f(t)$

$v = e^{-st} \qquad v' = -s\, e^{-st}$

$$\mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = \int_0^\infty \frac{df}{dt}\, e^{-st}\, dt$$

$$= \underbrace{\left[f(t)\, e^{-st}\right]_0^\infty}_{} + s \cdot \int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, dt$$

$$= -f(0) + s \cdot \mathcal{L}[f]$$

analog $$\mathcal{L}\left[\frac{d^2 f}{dt^2}\right] = -\left.\frac{df}{dt}\right|_{t=0} - s\, f(0) + s^2\, \mathcal{L}[f]$$

Beispiel: Kraftstoß $\tilde{f}\, \delta(t)$ $\quad [\tilde{f}] = N \cdot s$ da $[\delta(t)] = \frac{1}{s}$!

m in Ruhe $\quad x(0) = 0 \quad \dot{x}(0) = 0$

Newton $$m\ddot{x} = F(t) = \tilde{f}\, \delta(t)$$

$\mathcal{L}$-Trafo: $$\mathcal{L}[m\ddot{x}] = m \cdot \mathcal{L}[\ddot{x}] = m\left(-\dot{x}(0) - s\, x(0) + s^2\, \mathcal{L}[x(t)]\right)$$

$$\mathcal{L}[\tilde{f}\delta(t)] = \tilde{f} \int_0^\infty \delta(t)\, e^{-st}\, dt = \tilde{f} \cdot 1$$

$$- \underbrace{m\dot{x}(0)}_{=0} - s\underbrace{m\,x(0)}_{=0} + ms^2\,\mathcal{L}[x] = \tilde{f}$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{L}[x(t)] = \frac{\tilde{f}}{m}\;\frac{1}{s^2}$$

$$\mathcal{L}[x] = \frac{\Gamma(k+1)}{s^{k+1}} \quad \text{für } k > -1 \quad \Rightarrow \quad x(t) = t^k$$

$$\left[\begin{array}{ll} \Gamma(k+1) = & \text{Euler'sche Gammafunktion} \\ = & \text{verallgemeinerte Fakultät} \\ k \in \mathbb{Z}: & \Gamma(k+1) = k! \end{array}\right.$$

$$k = 1: \quad \mathcal{L}[x] = \frac{1}{s^2} \quad \Rightarrow \quad x(t) = t^1$$

Lösung für kraftlos $\quad x(t) = \frac{\tilde{f}}{m} \cdot t = v \cdot t$

$$\Rightarrow \quad p = m \cdot v = \tilde{f} = \int F(t)\,dt \quad (\text{aus Physik 1})$$
