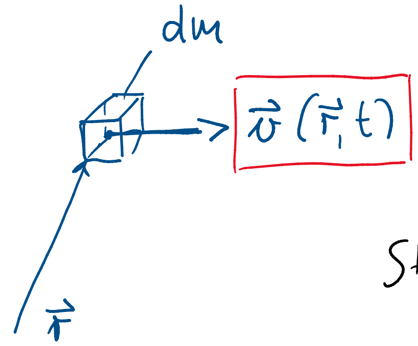
Dynamik der Fluide

Fluid: Materie mit sehr kleinen Scherkräften

$\Rightarrow$ rückstellende Kräfte bei Deformation fehlen

keine starre Form

Darstellung Massenelemente



Strömungsfeld $\vec{v}(\vec{r},t)$

$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0 \Rightarrow$ stationäre Strömung

(Für ext. Beobachter ändert sich $\vec{v}(\vec{r})$ nicht)

Zeitableitung: $\vec{v}(x,y,z,t)$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \underbrace{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}}_{\text{explizite Abl.}} + \underbrace{\frac{\partial \vec{v}}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z}\frac{dz}{dt}}_{\text{konvektive Zeitableitung}}$$

$$= \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \underbrace{\frac{\partial \vec{v}}{\partial x} v_x + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} v_y + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} v_z}$$

$$\boxed{\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v}}$$ Substantielle Zeitableitung

in Komponenten:

in Komponenten:

z. B $\frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + \left(v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \right) v_x$

Massefluss I_m = Masse eines Fluids die pro Zeiteinheit durch Fläche A strömt

$$\underline{I_m} = \frac{dM}{dt} = \rho \frac{dV}{dt} = \underline{\rho \cdot A \cdot v}$$

Stromdichte $j = \frac{I_m}{A} = \rho v \quad \Rightarrow \quad \underline{\vec{j} = \rho \vec{v}}$

Volumen V mit Oberfläche: Gesamtstrom I_m in V hinein bzw. heraus:

$$I_m = -\oint\!\!\oint_A \vec{j} \cdot d\vec{A} \overset{\text{Gauss}}{=} -\iiint_V \underbrace{\operatorname{div} \vec{j}}_{} \, dV$$

Masse in V nimmt ab wenn $\vec{j} > 0$ (herausströmt)

Quellen /Senken von $\vec{j}$

$$I_m = \frac{dM}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_V \rho \, dV = \iiint_V \frac{d\rho}{dt} \, dV$$

V beliebig $\Rightarrow$ $\quad -\operatorname{div} \vec{j} = \frac{d\rho}{dt} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{d\rho}{dt} + \operatorname{div} \vec{j} = 0}$

Kontinuitätsgleichung

(Erhaltung der Masse)

Energieerhaltung? Ohne Reibung

Energiedichten:

Energiedichten:

kinetische Energie: Massenelement dm $\quad dE_{kin} = \frac{1}{2} v^2 \, dm$

$$\Rightarrow \quad \frac{dm}{dV} \to \rho \quad \Rightarrow \quad \frac{dE_{kin}}{dV} = e_{kin} = \frac{1}{2} \rho v^2$$

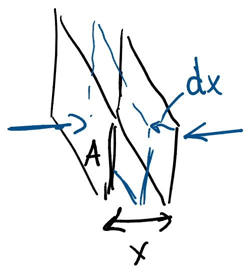
Dichte der kin. En.

potentielle Energie:

1. innere potentielle Energie:

bei Kompression $\quad dE^i_{pot} = -K \cdot dV$

Kompressionsmodul



$$\frac{dE^i_{pot}}{V} = -K \frac{dV}{V} = dp$$

statischer Druck = potentielle Energiedichte an diesem Ort

2. potentielle Energie im äusseren Feld (Gravitation)

$$E^a_{pot} = m \cdot g \cdot h \quad \Rightarrow \quad e^a_{pot} = \rho g h$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{1}{2} \rho v^2 + p + \rho g h = \text{konstant}}$$

Gesetz von Bernoulli

Anm: auch mit Reibung kann Gesetz häufig (lokal) angewandt werden.

Bem: ρ ist im allg. nicht konstant

bei Flüssigkeiten gute Näherung "inkompressibel") $K \to \infty$

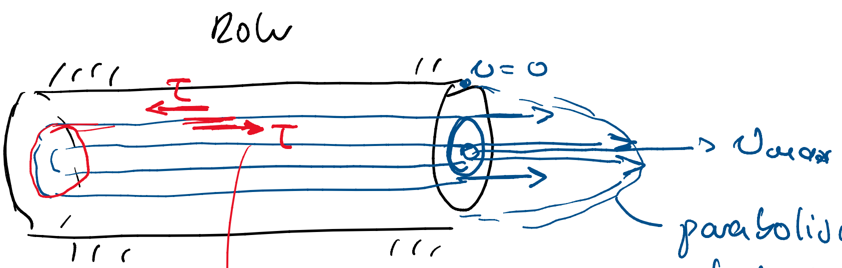
$\Rightarrow \rho = \text{konst.}$

Innere Reibung

Reibung geschwindigkeitsabhängig (Impulsübertrag)

„Kleine" Geschwindigkeiten

Strömung in Schichten (lat. lamina) ⇒ laminare Strömung



Newtonsches Fluid:

$$\boxed{\tau = \eta \, |\nabla v|}$$

Viskosität — Gradienten der Geschw.

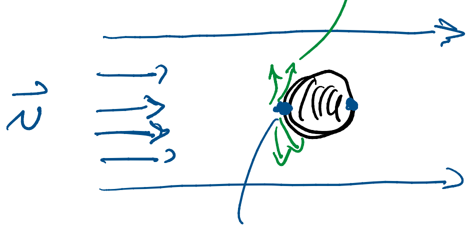
$\eta = \rho \mu$ dynamische Viskosität

μ: kinematische Visk.

z.B. Hagen-Poiseuille'sches Gesetz: Massestrom durch Rohr

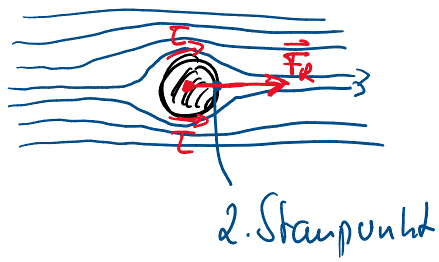
$$I_m = \rho \cdot \frac{\pi r^4}{8 \eta l} \cdot \Delta p = \rho \frac{\pi r^2 \, r^2}{8 \eta} \underbrace{\frac{\Delta p}{l}}_{\text{Druckgradient}}$$

Kugel:



$v = 0 \Rightarrow$ Druck hoch ($\frac{1}{2}\rho v^2$ Staudruck)

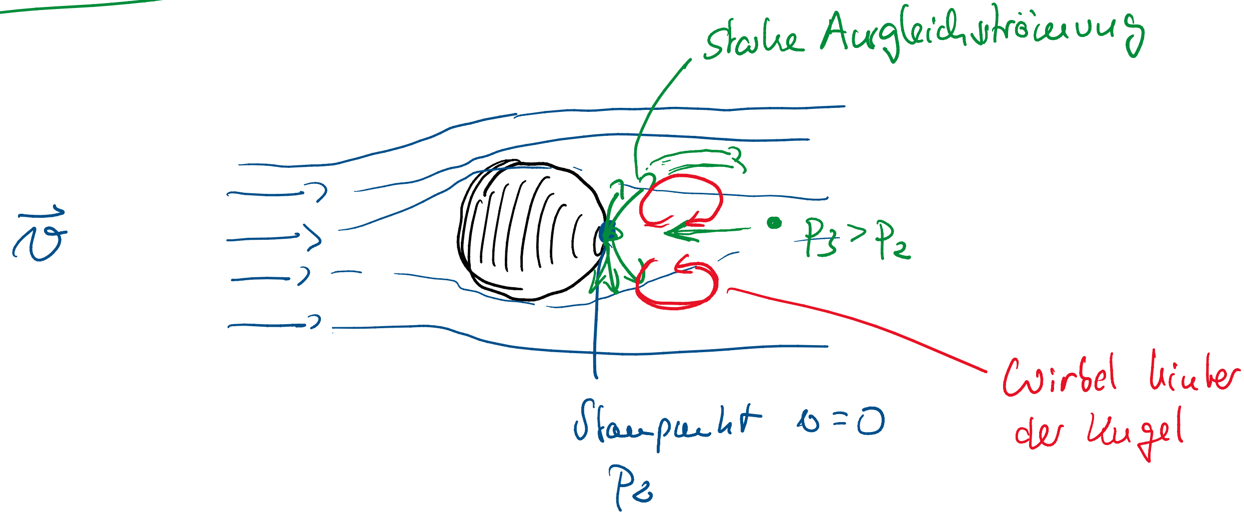
=> laminare Strömung um die Kugel



Integration über Kugeloberfläche $\boxed{F_R = 6\pi r \eta v}$

Stokessches Gesetz

„Grosse" Geschwindigkeiten: $\frac{1}{2}\rho v^2$ gross



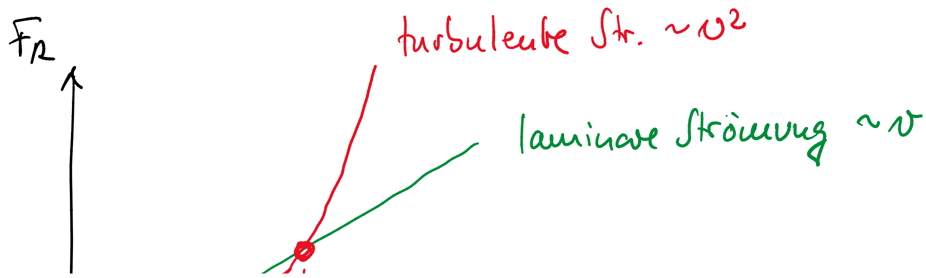
Wirbel werden generiert => Energie

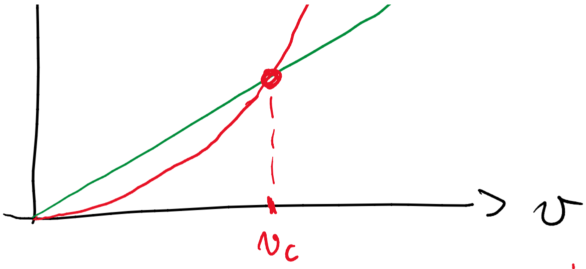
Kraft abhängig von: Angriffsfläche $\pi r^2 = A$

übertragene kin. En. $\frac{1}{2}\rho v^2$

turbulente Str.: $\boxed{F_R = c_w \frac{1}{2}\rho v^2 \cdot A}$

Widerstandsbeiwert c_w hängt nur von Form des Körpers ab





krit. Geschwindigkeit

laminar — "zähigkeitsbestimmt"

turbulent — "trägheitsbestimmt"

Kugel: bei v_c $\quad 6\pi r \eta v_c \approx c_w \cdot \frac{1}{2} \rho v_c^2 \cdot \pi r^2$

typ. Längendim. $l \approx 2r$

$$\frac{24}{c_w} = \boxed{\frac{\rho\, 2r\, v_c}{\eta} = Re}$$

Reynoldszahl

Strömungen mit gleichen Reynoldszahlen verhalten sich gleich (Ähnlichkeitstransformation)