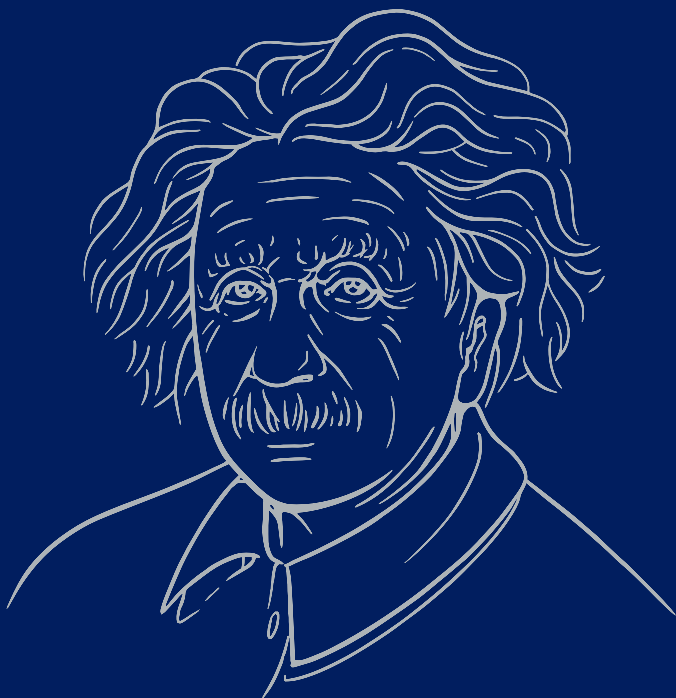
University of Zurich[UZH] | ETH zürich

Revolutionizing Physics



ALBERT EINSTEIN

UZH I ETH ALUMNUS
NOBEL PRIZE 1921

Revolutionizing Physics

ALBERT EINSTEIN – UZH I ETH
NOBEL PRIZE 1921

EDITORIAL

100 Years of the Nobel Prize for Albert Einstein – An Opportunity to Discuss Innovation 4
Vidar Helgesen and Jan Knutsson

Whose Einstein Is It Anyway? 6
Joël Mesot and Michael Schaepman

ALBERT EINSTEIN IN ZURICH

This Is (Not) a Love Story 8
Mathias Plüss

1905 – ANNUS MIRABILIS

How Einstein Opened the Door to Modern Physics 12
Jürg Fröhlich and Daniel Wyler

The Path to the Atom – Einstein's Doctoral Thesis at UZH 16

The Adventurous Journey of a Diploma 38

$E=mc^2$ – Four Further Strokes of Genius 40

100 YEARS OF THE NOBEL PRIZE

Quantum of Light – Einstein's 1921 Nobel Prize 110

On the left, view of the main buildings of the University of Zurich and ETH Zurich
On the right, Albert Einstein in 1912
Left: © ETH Zurich, Marco Carocari
Right: The ETH Library Zurich, Image Archive, Jan F. Langhans

100 Years of the Nobel Prize for Albert Einstein – An Opportunity to Discuss Innovation

Vidar Helgesen and Jan Knutsson

The Swedish inventor and businessman Alfred Nobel expressed in his will in 1895 that the Nobel Prize should be awarded to individuals who, during the preceding year, had conferred the greatest benefit to humankind. The will stated that the prize should be given in five fields: physics, chemistry, physiology or medicine, literature, and peace. The first Nobel Prizes were granted in 1901.

SOLUTIONS TO MANY OF THE CRITICAL CHALLENGES FACING THE WORLD TODAY WILL DEPEND ON THE ABILITY OF SCIENCE, BUSINESS AND GOVERNMENT TO BE AT THE INNOVATION FRONTIER OF THE CURRENT SOCIETAL TRANSFORMATIONS.

In 1922, Albert Einstein was awarded the Nobel Prize in Physics for the year 1921. He was active as a researcher at various stages in both Bern and Zurich. The award honored his

Vidar Helgesen,
Executive Director of the Nobel Foundation
Photo: Nobel Prize Outreach, Clément Morin

contributions to theoretical physics in general and, in particular, his discovery of the law of the photoelectric effect.

As Einstein was unable to take part in the yearly festivities in Stockholm in December of 1922, he delivered his Nobel lecture entitled “Grundlagen und Probleme der Relativitätstheorie” during the celebrations on the occasion of the 300th anniversary of the city of Göteborg in July 1923, with Sweden’s King Gustav V in attendance.

Alfred Nobel and Albert Einstein were both visionaries. The link between them constitutes an important part of the multifaceted relations between Sweden and Switzerland, two countries that consistently find themselves at the top of global innovation rankings. Solutions to many of the critical challenges facing the world will depend on the ability of science, business and government to be at the innovation frontier of the current societal transformations.

What can the spirit of Alfred Nobel and Albert Einstein teach us today? What can Sweden and Switzerland learn from each other? That is the focus of the Innovation Roundtable organized in Zurich by the Swedish Embassy, Innosuisse and Vinnova, commemorating the 100th anniversary of Albert Einstein’s Nobel Prize.

WHAT CAN THE SPIRIT OF ALFRED NOBEL AND ALBERT EINSTEIN TEACH US TODAY? WHAT CAN SWEDEN AND SWITZERLAND LEARN FROM EACH OTHER?

Jan Knutsson,
Swedish Ambassador to Switzerland
and to the Principality of Liechtenstein
Photo: used with permission of the Embassy of Sweden in Bern

Whose Einstein Is It Anyway?

Joël Mesot,
President of ETH Zurich
Photo: ETH Zürich, Markus Bertschi

Joël Mesot and Michael Schaepman

A hair salon in the historic center of Trieste uses a portrait of Albert Einstein to attract new customers. A manufacturer of nutritional products for toddlers promises parents genius kids with a baby Einstein. Is there anything in the world for which the Albert Einstein brand – synonymous with genius – is not used? The list is endless, from children's toys to sneakers, tablets to planters, headphone stands to watches.

But whose Einstein is it anyway? When we at the University of Zurich (UZH) and ETH Zurich ask ourselves this question, it quickly gets complicated. Albert Einstein, one of the greatest physicists of all time, was active at both universities. Equipped with a Swiss university entrance qualification ("Matura") from Aarau High School, young Einstein studied at ETH – then called the Polytechnikum – from 1896 to 1900 and obtained a teaching diploma in mathematics and science. What followed was a most productive time in Bern culminating in his *annus mirabilis* 1905. In the same year, he submitted his doctoral dissertation entitled "A New Determination of Molecular Dimensions" at UZH, where he was also later appointed as associate professor of theoretical physics between 1909 and 1911. In 1912, he returned to ETH as professor of theoretical physics. He then left Zurich for good and went to Berlin in 1914. Four years later, even the enticing offer of a double professorship at UZH and ETH was not sufficient to bring him back to Switzerland. With the rise of the Nazis in Germany, Einstein moved from Berlin to Princeton, where he died in 1955.

So, rather than quarreling pettily over who owns his achievements, it is much more important to share his vast intellectual legacy with the world and younger generations. Still today, Einstein's revolutionary findings provide theoretical groundwork for cutting edge innovations, and they live on in

RATHER THAN QUARRELING PETTILY OVER WHO OWNS EINSTEIN'S ACHIEVEMENTS, IT IS MUCH MORE IMPORTANT TO SHARE HIS INTELLECTUAL LEGACY WITH THE WORLD AND YOUNGER GENERATIONS.

Michael Schaepman,
President of the University of Zurich
Photo: UZH, Marvin Zilm

everyday applications such as the Global Positioning System (GPS). With his explanation of the photoelectric effect, for which he received the Nobel Prize in 1921, Einstein also contributed a great deal to the science behind today's solar energy solutions.

Building on the seminal work of Albert Einstein, researchers in Zurich and around the world are trying to unravel the great mysteries of nature. Take for example the James Webb telescope that sent us breathtaking pictures from space in July 2022. Galaxies became visible that had never previously been seen by the human eye. The observed gravitational lensing of these galaxies is an effect of Einstein's General Relativity Theory. At CERN, the European Center for Particle Physics Research in Geneva, researchers from both UZH and ETH collaborate on the Compact Muon Solenoid (CMS) experiment, one of the two experiments that discovered the famous Higgs boson 10 years ago. While the CMS collaboration comprises a community of scientists and engineers from all over the world, there is a Swiss "clock" ticking at the very heart of it: the pixel detector was designed in a close partnership between ETH, UZH and the Paul Scherrer Institute. Finally, scientists from UZH and ETH contribute to the emerging field of gravitational wave astronomy which allows gravitational waves, as first

BUILDING ON THE SEMINAL WORK OF ALBERT EINSTEIN, RESEARCHERS IN ZURICH AND THROUGHOUT THE WORLD ARE TRYING TO UNRAVEL THE GREAT MYSTERIES OF NATURE.

detected by the Laser Interferometer Gravitational Wave Observatory (LIGO) and subsequent experiments and consortia (e.g., LISA/Pathfinder, LISA, LSC, ACES), to be theoretically, observationally and experimentally validated.

So, while some believe in the power of the Albert Einstein brand to sell products, we believe in the power of research and education at our two excellent universities to build on his extraordinary legacy.

This Is (Not) a Love Story

Mathias Plüss

Albert Einstein lived in Zurich for almost eight years, longer than in any other Swiss town. It was in Zurich that he made important advances in the development of the Theory of General Relativity. However, his time here also involved several disappointments.

Albert Einstein and Zurich – it could have been a real love story. Einstein, born in Ulm in 1879, was a resident of Zurich, obtaining citizenship in 1901, and lived there for almost eight years altogether, longer than in any other Swiss town. In retrospect, however, it was only his years in Aarau and Bern that he looked back on fondly. “Einstein liked to think back to his time in Bern, which he spoke of more often and more positively than of Zurich,” Wolfgang Pauli wrote in an obituary in the *Neue Zürcher Zeitung*.

Nonetheless, it appears he actually had a good time there. From 1896 to 1900, Einstein studied physics at ETH, then known as the Federal Polytechnical School. He appreciated the institution’s liberal spirit: as a student there, you could “more or less do as you liked.” So he put together a study plan entirely to his own taste: “Some lectures I followed with great interest. Otherwise, I skipped class often and stayed at home to study the masters of theoretical physics with holy fervor.” This self-study took place mainly in Hottingen, where Einstein rented lodgings from various landladies. He also spent much time in the Pension Engelbrecht at Plattenstrasse 50, where his friend, colleague and later wife, Mileva Marić, had lodgings.

Einstein’s favorite leisure activity was playing the violin. He was regularly invited by Alfred Stern, a historian at the ETH, and his family, to enjoy a meal and make music with them. In summer, he enjoyed sailing on Lake Zurich, in winter he loved hairraising sledge rides on the Zürichberg. And he could often be found happily sitting in the Café Metropol on the Stadthausquai.

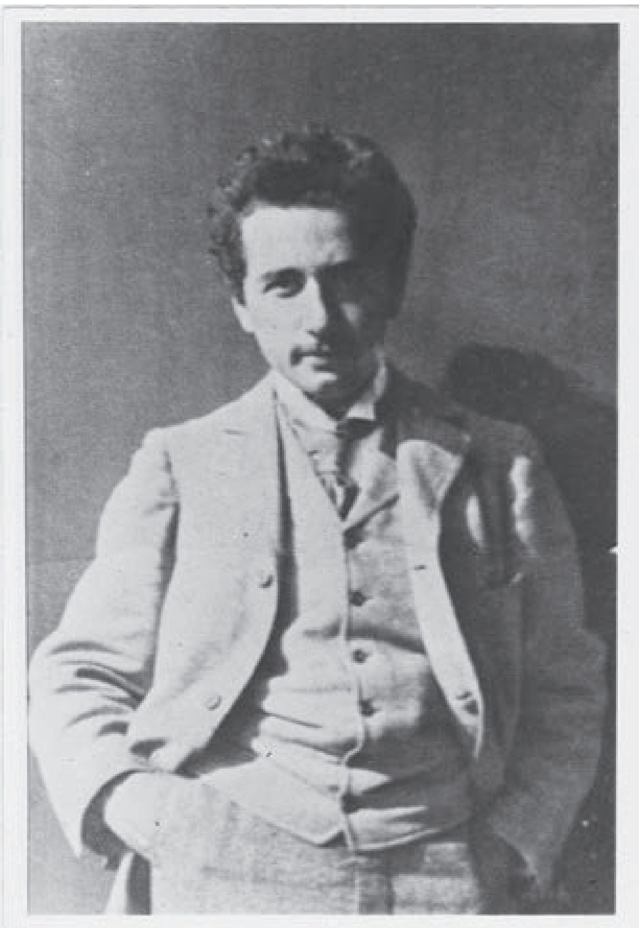
After graduating from ETH, Einstein worked from 1902 to 1909 as an employee of the Federal Patent Office in Bern. His *annus mirabilis* fell in the middle of this period: in 1905 he published no less than five revolutionary papers. These included the Theory of Special Relativity and the Light Quanta Hypothesis, for which, among other achievements, he was later awarded the Nobel Prize.

> **1905 WAS EINSTEIN’S ANNUS MIRABILIS: THE PHYSICIST PUBLISHED NO LESS THAN FIVE GROUNDBREAKING PAPERS.**

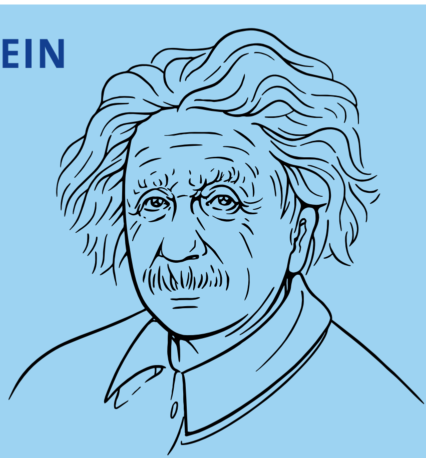
Einstein then moved back to Zurich a second time, when the University created an associate professorship in theoretical physics especially for him. Professor Einstein was usually ill-prepared: his lecture notes often consisted of a scrap of paper the size of a visiting card. But he was so selflessly devoted to his students that they wrote a letter of protest to the education department when he moved to Prague after only three semesters.

Einstein returned to Zurich again in 1912, this time as professor of theoretical physics at ETH. He was now well established: he had few teaching responsibilities and a good salary, so that he could permit himself an imposing apartment on the Zürichberg. Otto Stern had followed him from Prague to Zurich as his assistant, and served as sparring partner and "calculating machine." But again, Einstein only managed to stay in Zurich for a year and a half – in 1914 he left for good, for Berlin. Einstein's time in Zurich was thus fragmented, and also contained its fair share of disappointments. In 1895, as a 16-year-old, he had failed the ETH's entrance exam. He found it "quite right" that he did not get in: there were gaps in his knowledge, and he had to take the school-leaving certificate at the Aarau Cantonal School before he could begin his studies. He found it not so right, however, that after graduating as the only successful student of his year from ETH, he failed to receive an assistant's position there. There were, however, reasons for that too: his final grade was only average, and his tendency to skip classes had not exactly endeared him to his professors. In 1899, he had even received just a 1 (the lowest grade) in his physics practical, on account of "lack of diligence," accompanied by a reprimand from the director.

Albert Einstein as a student in Zurich
Photo: The ETH Library Zurich, Image Archive



ALBERT EINSTEIN



Nobel Prize in Physics 1921 "for his services to Theoretical Physics, and especially for his discovery of the laws of the photoelectric effect"

*** 14 March 1879 in Ulm**
† 18 April 1955 in Princeton, New Jersey

In 1905 Albert Einstein submitted his revolutionary paper "Eine neue Bestimmung der Moleküldimensionen" (A New Determination of Molecular Dimensions) as a dissertation at the University of Zurich.

From 1909 to 1911 he was professor of theoretical physics at the University of Zurich.

Later, when he was a lecturer at the Physics Institute of the University of Zurich, there was friction with colleagues. Furthermore, before he had taken up his duties, the faculty committee had sent a letter containing anti-Semitic clichés to the cantonal education director – which, luckily, Einstein did not get to hear of. Ultimately, the main reasons for his rapid departure for Prague were poor remuneration in Zurich and the prospect of a full professorship in Prague.

There were also problems with his later appointment at the ETH. Robert Gnehm, president of the college council, long opposed the selection of Einstein, who was by now fairly famous, on the grounds that the position "was not suitable for Mr. Einstein," as he was "not an outstanding lecturer." The delay irritated Einstein, stuck unhappily in Prague: "The good people of Zurich can get lost … apart from yourself," he wrote to Heinrich Zangger, a forensic pathologist at the University, who had lobbied for his appointment. And he advised his friend not to make any further efforts: "You can confidently leave the ETH to God's inscrutable wisdom."

EINSTEIN'S LECTURE NOTES OFTEN CONSISTED OF A SCRAP OF PAPER THE SIZE OF A VISITING CARD.

Despite everything, Einstein retained a positive impression of Zurich at least until his middle years. He described the city as "my real home," and, in Berlin during the war, he even referred to "my dear Zurich, my home town, which means more to me, as a convinced democrat, than ever in these times." That the relationship subsequently cooled was above all to do with his family. Einstein's rapid departure for Berlin was already influenced by the fact that he had fallen in love with his cousin, Elsa Löwenthal, who lived there. This did not exactly make the time in Berlin agreeable for Mileva, his wife, and after a short while she returned, with the two boys, Hans Albert and Eduard, to Zurich.

Relations between Berlin and Zurich now deteriorated rapidly. The marriage ended in divorce in 1919 and Einstein married his cousin. He now hardly ever visited Zurich, not only on account of wartime travel restrictions, but also because of his negative feelings toward Mileva. Einstein even turned down a generous offer of a double professorship at the University and the ETH. After the tensions of the divorce had been to some extent overcome, the relationship with his ex-wife became more relaxed. Every year, Einstein spent some weeks of holidays with his sons, and he also came regularly to Zurich, where he stayed with the family. But after emigrating to the USA in 1933, he did not return to Europe. Mileva, though, remained in Zurich. She was able to purchase her house at Huttenstrasse 62 and two rental properties at Hinterbergstrasse 86 und 88 with part of the Nobel Prize money, which Einstein had promised her in 1918 in order to persuade her to divorce: he had already been speculating on the prospect of the prize.

EXPERTS TODAY STILL REGARD THE THEORY OF GENERAL RELATIVITY AS THE MOST BEAUTIFUL OF ALL THEORIES IN PHYSICS.

When Einstein was in fact awarded the prize in 1922 – it applied retroactively for 1921 – the official announcement by the Noble Committee stated that it was awarded for his discovery of the photoelectric effect, but also generally for Einstein's "services to Theoretical Physics," which undoubtedly include the Theory of General Relativity, still today regarded by experts as the most beautiful of all theories in physics. Although Einstein completed it in Berlin in 1915, he worked particularly hard on it during his time at ETH, as evidenced by the "Zurich Notebook." This shows that Einstein first wrote down the (almost) correct formulae for the field equations as early as 1912. But he then rejected them. Only three years later did he realize that he had been on the right track. So, Zurich is entitled to its own modest share in the prize.

And two ETH graduates, Michele Besso and Marcel Grossmann also had a personal share in Einstein's success. Grossmann's mathematical abilities were indispensable to Einstein in the development of the Theory of General Relativity, while Besso worked mainly on the Theory of Special Relativity.

Einstein's years in Switzerland are well documented. This is above all thanks to the Zurich literary figure Carl Seelig, whose papers are now in the library at the ETH. He contacted Einstein in 1952, when he was living in Princeton, interviewed many eyewitnesses, and wrote one of the first reliable biographies of Einstein. Touchingly, Seelig, who was the poet Robert Walser's guardian, also began to concern himself with Eduard Einstein, who had been diagnosed with schizophrenia in 1933.

While Einstein's efforts in Zurich have always been regarded – by his contemporaries and by posterity – as significant, Mileva's fate has attracted attention only in recent years. That she made a substantial contribution to Einstein's work in physics, as has been asserted, is now generally regarded as disproved. She died in 1948 in the Eos private clinic at Carmenstrasse 18. Bad health and the poor economic situation had deprived her of her properties. Today, plaques on her house in the Huttenstrasse, at the place she died, and at the Nordheim cemetery commemorate Mileva Einstein-Marić.

Source:
Margrit Wyder: Einstein und Co. – Nobelpreisträger in Zürich;
Verlag NZZ libro, Zurich 2015
Illustration: Tara von Grebel
Translation: University of Zurich

From 1909 to 1911, Albert Einstein researched and taught in the University of Zurich's former physics building at Rämistrasse 69
Photo: Baugeschichtliches Archiv der Stadt Zürich
Photographer: Thomas Hussel

Mileva und Albert Einstein in Prague, 1912
Photo: The ETH Library Zurich, Image Archive
Photographer: Jan F. Langhans

How Einstein Opened the Door to Modern Physics

Jürg Fröhlich and Daniel Wyler

When Einstein entered the stage of science at the beginning of the 20th century, physics was in a deep crisis. With his groundbreaking discoveries of 1905 he made crucial contributions towards resolving the crisis and strongly influenced the future course of physics.

Toward the end of the 19th century, physics fell into a deep crisis. New experimental and theoretical discoveries were either incomprehensible or in contradiction with fundamental laws of classical mechanics and thermodynamics. The difficulties concerned three fundamental themes in physics.

(I) The atomistic view of matter prevailing in chemistry appeared to be in conflict with laws concerning gases and fluids based on the hypothesis that matter is a continuous medium. It seemed difficult to comprehend how various attributes of matter such as temperature or viscosity could be understood from an atomistic point of view. J.C. Maxwell (1831-1879), and later L. Boltzmann (1844-1906), had developed and explored a fairly successful theory of gases – based on the idea that gases were systems of point-like atoms or molecules – to derive the laws of the theory of heat (thermodynamics) from mechanics. However, their proposals met with criticism and skepticism, not least because some of them appeared to contradict a fundamental theorem (the recurrence theorem) derived by the famous and influential French mathematician H. Poincaré (1854-1912).

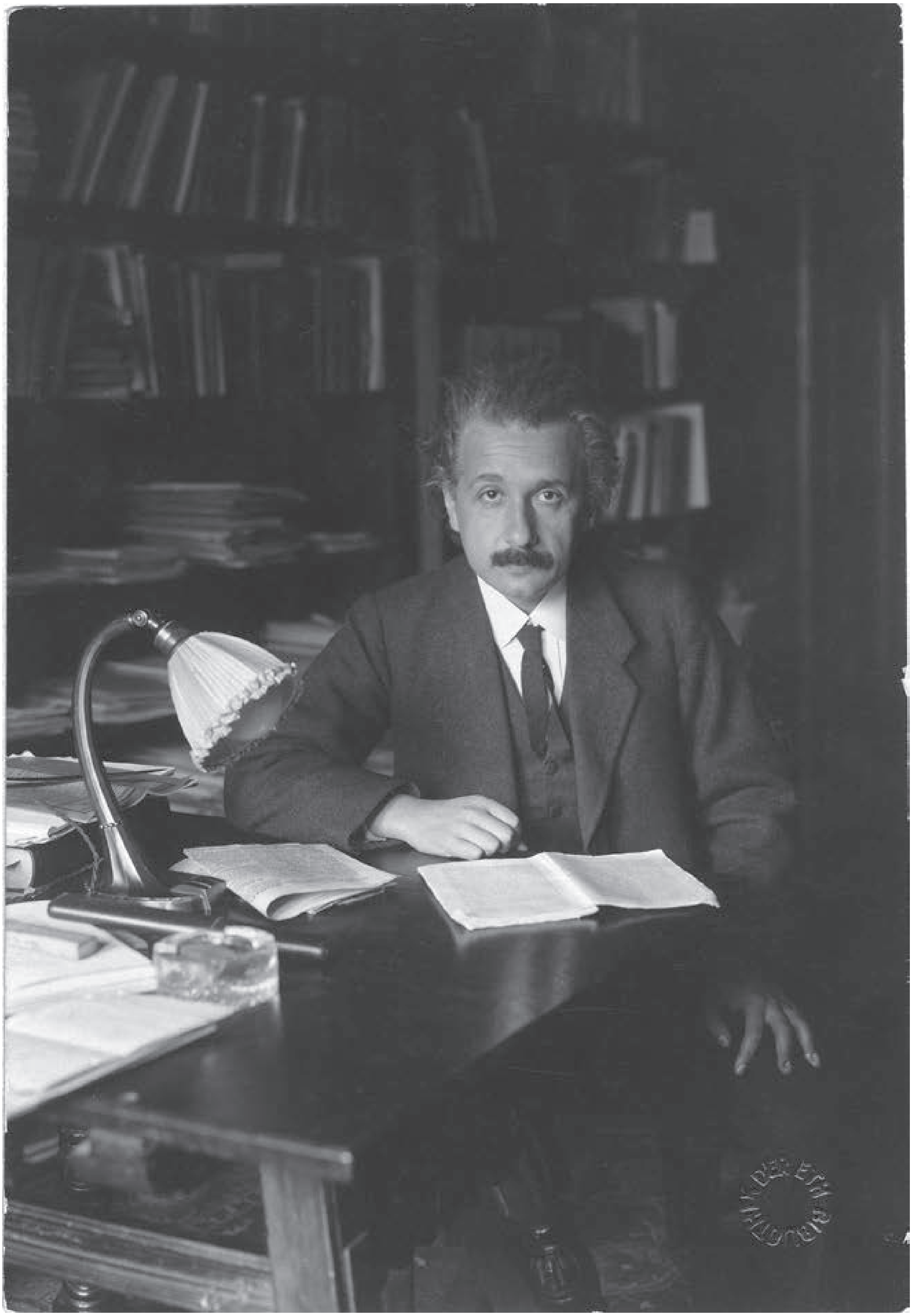
(II) Another area of conflict was the incompatibility of the laws governing electric and magnetic phenomena, the famous Maxwell equations, with the laws of Newtonian mechanics when comparing measurement outcomes of observers in relative motion to one another. In order to describe the propagation of light waves, shown by Maxwell to be of electromagnetic origin, a putative mechanical medium carrying the light waves, the so-called aether, was introduced. But it turned out to be impossible to measure the seasonal variation of the motion of the Earth relative to the aether (negative outcome of the famous Michelson-Morley experiment, 1887).

(III) A third area full of puzzling data presaged quantum theory. Hot gases, such as hydrogen, were found to emit only certain discrete colors of light (spectral lines). In 1900, the exigencies of providing electric lighting for the city of Berlin motivated the gathering of precise experimental data on electromagnetic radiation (light) in thermal equilibrium at various temperatures. In a stroke of genius, M. Planck (1858-1947) proposed a formula that described these data very accurately. He argued that energy is exchanged in discrete portions, so-called *energy quanta,* between the electromagnetic radiation in thermal equilibrium and the material walls containing it. This yielded some explanation of the formula he had discovered. His formula contained three fundamental constants of nature: the speed of light *(c)*, a fundamental constant *(k)* pointing to the atomistic constitution of matter later dubbed Boltzmann constant, and a third constant *(h)*, later called Planck's constant, related to the quantum-mechanical nature of matter and radiation. The three constants *c, k, h* and Newton's constant *G,* which governs the strength of the gravitational force, appeared to be the only fundamental dimensional constants of nature[1]. Planck intuited that each of them would turn out to be associated with a revolution in physics.

Thus was the stage set when Albert Einstein (1879-1955) entered the scene shortly after the beginning of the 20th

[1] A dimensional quantity is associated with attributes of physical objects, such as their length, mass or velocity. This is in contrast to a dimensionless one such as the number three. Dimensionless constants can appear as parameters in physical models, whereas dimensional constants have a model-independent universal significance. This entails the existence of a universal length, mass and velocity, which are expected to be the same everywhere in the universe, in contrast to human-made concepts, such as the meter.

Albert Einstein at his desk, circa 1920
Photo: The ETH Library Zurich, Image Archive



century. He had already developed a keen interest in physics during his days as a student at the Kantonsschule Aarau and at the Eidgenössisches Polytechnikum (ETH Zurich). He had written his first scientific essay at the age of only 16. As a student he set out to study the most important original publications of the masters of the new physics discovered in the second half of the 19th century. His unremitting efforts to understand physics in depth led him to his celebrated breakthroughs of the year 1905, his *annus mirabilis*. They contributed in a crucial way to resolving the crisis and triggering the revolutions in physics that Planck had divined. Einstein's discoveries were published in four papers that appeared in the journal *Annalen der Physik*. These papers were to profoundly influence the future course of physics.

The first paper in this series – and the only one that Einstein claimed was revolutionary – concerned the quantum theory of light *(h)*. Starting from Planck's formula, he was able to argue convincingly that light waves of wave-length λ are composed of "light quanta" (indivisible portions of light later called "photons") of energy hc/λ. He used this insight to rederive Planck's formula and to explain the so-called photoelectric effect observed in the emission of electrons from metal plates illuminated by monochromatic light. According to his own testimony, Einstein spent more time thinking about quantum theory than about anything else. In later years he made further important contributions to this theory. He introduced probabilities into quantum physics and laid the basis for the physics of lasers. For quite some time, Einstein's idea of light quanta, or photons, met with almost universal disbelief. But the idea turned out to be immensely successful, and Einstein was awarded the Nobel Prize explicitly for the discovery of the photon and his explanation of the photoelectric effect. This effect also offered a great opportunity to confront his theoretical ideas with experimental data.

ACCORDING TO HIS OWN TESTIMONY, EINSTEIN SPENT MORE TIME THINKING ABOUT QUANTUM THEORY THAN ABOUT ANYTHING ELSE.

To propose ideas that can be tested in concrete experiments is characteristic of all the discoveries made by Einstein in his *annus mirabilis*. Another example is provided by the second paper Einstein published in 1905, in which he presented his theory of Brownian motion *(k)*. This phenomenon refers to the zig-zag motion of tiny particles suspended in a liquid, as first observed under a microscope by the biologist Brown in the 19th century. Einstein argued that the irregular motion of these particles must result from collisions with lumps of molecules that constitute the liquid. These lumps of molecules perform a heat movement with a kinetic energy proportional to kT, where T is the absolute temperature of the liquid. But at the beginning of the 20th century, they could not yet be observed directly. Einstein's analysis of Brownian motion provided a convincing confirmation of the atomistic structure of matter and suggested how to experimentally measure the Boltzmann constant k, which was later successfully accomplished by J. Perrin (1870-1942).

EINSTEIN CALLED THE EQUIVALENCE OF ACCELERATED MOTION AND GRAVITATIONAL PULL THE HAPPIEST THOUGHT OF HIS LIFE.

In the same year, Einstein made another discovery related to the one concerning Brownian motion and submitted it as his PhD thesis to the University of Zurich. In this work he proposed a concrete quantitative method to experimentally determine the true size of molecules. Einstein's method has been used for practical purposes (e.g., in the dairy industry), ever since, and has been quoted thousands of times.

In the third paper, entitled "On the Electrodynamics of Moving Bodies", Einstein presented the Special Theory of Relativity in its final form. There are precursors to Einstein's analysis attributed to the Dutch theorist H. A. Lorentz (1853-1928) and to H. Poincaré. However, a firm conceptual basis of the Special Theory of Relativity had hitherto not been formulated, the theory was not worked out in final form, and its physical contents remained unclear. With Einstein's work this changed at once. He started from two fundamental principles: (1) the speed of light, c, does not depend on the inertial reference frame in which it is measured, i.e. all inertial observers measure the *same* value for c in *all directions* of space; and (2) the laws of physics, including electromagnetism *and* mechanics, have a form that does not depend on the inertial frame used to formulate them (Relativity Principle). From these two principles Einstein derived the entire contents of the Special Theory of Relativity *including* the modifications of Newtonian mechanics necessary to make it conform to these principles. He explained basic predictions of the theory in the form of "Gedanken experiments" (thought experiments) such as the famous twin paradox. He eliminated the idea of the aether from physics, thereby explaining the negative outcome of the Michelson-Morley experiment in a natural way.

Artist Gina Plunguian working on a sculpture of Albert Einstein, 1947
Photo: The ETH Library Zurich, Image Archive

The conclusion of the series was a paper wherein the world-famous formula $E = mc^2$, namely the fact that mass and energy are equivalent, was derived within the framework of the Special Theory of Relativity. This discovery and the correct formulation of relativistic mechanics are exclusively due to Einstein. Einstein's theory laid the basis for our present view of space and time as "space-time" and for the kinematics of elementary particle physics, and it has found countless technical applications.

Einstein's fundamental discoveries did not end in 1905. Soon after his work on Special Relativity, he realized that it was not possible to incorporate Newton's theory of gravitation into the framework of special relativity in a natural way, and that gravitational effects should ultimately be caused b*y the curvature of space and time*. In a heroic effort extending over at least eight years, and with some help from his friend and colleague M. Grossmann (1878-1936), Einstein created the General Theory of Relativity (where the constants G and c enter prominently). A starting point of this theory is the "Equivalence Principle" according to which one cannot distinguish between the experiences of accelerated motion and of gravitational pull. Einstein called this the happiest thought of his life. The theory eliminated the special role played by inertial frames and forms the basis of our modern understanding of space-time and gravitation. Among its many predictions are the deflection of light rays passing near the sun and other stars, gravitational waves and the existence of black holes. Surprisingly, it also has a concrete application in Global Positioning System (GPS) technology, which would not work if one did not take into account general-relativistic effects.

With the completion of the General Theory of Relativity in 1915, Einstein had contributed the essential breakthroughs and crucial first steps to all the revolutions associated with the fundamental constants *c, h, k* and G that Planck had intuited. Einstein's work remains iconic for its lucidity and depth. He is the ultimate example of an excellent mathematical physicist, namely a theorist who uses sophisticated mathematics to create completely new physics.

Authors: Jürg Fröhlich is professor emeritus of physics at ETH. Daniel Wyler is professor emeritus of physics at the University of Zurich.

The Path to the Atom – Einstein's Doctoral Thesis at UZH

1905 went down in the history of physics as an *annus mirabilis*, or miracle year. It was then that Albert Einstein published five papers in close succession, all of which would today be regarded as worthy of a Nobel Prize. One of these groundbreaking studies was his 17-page thesis "A New Determination of Molecular Dimensions", which the 26-year-old completed on 30 April 1905 and submitted to the University of Zurich on 20 July. It earned him his doctorate, conferred by the University on 15 January 1906.

In his Zurich dissertation, which would become one of Einstein's most cited research papers, the physicist used data on sugar solutions with a known concentration together with a new formula for diffusion to show how the molecular size and number of molecules in a mole (Avogadro number) can be calculated from a solution's viscosity. Einstein's paper also lent weight to the hypothesis – a source of controversy at the time – on the existence of atoms.

The findings from Einstein's study have led to all kinds of practical applications, including in the construction and petrochemical industries. The paper has also been cited in ecological studies on the dispersion of tiny liquid droplets (aerosols) in the atmosphere.

EINE NEUE BESTIMMUNG DER MOLEKÜLDIMENSIONEN

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR

ERLANGUNG DER PHILOSOPHISCHEN DOKTORWÜRDE

DER

HOHEN PHILOSOPISCHEN FAKULTÄT
(MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE SEKTION)

DER

UNIVERSITÄT ZÜRICH

VORGELEGT

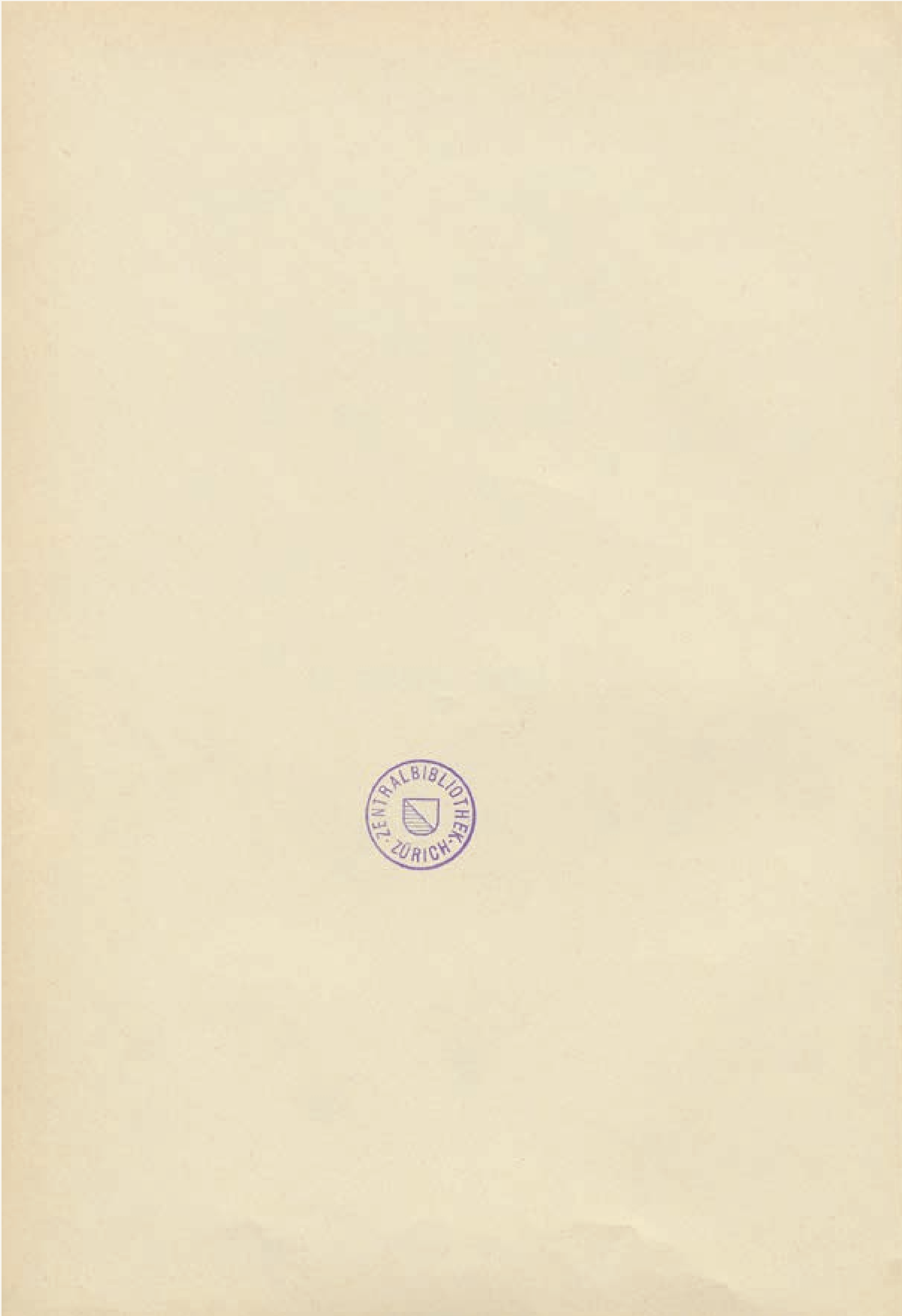
VON

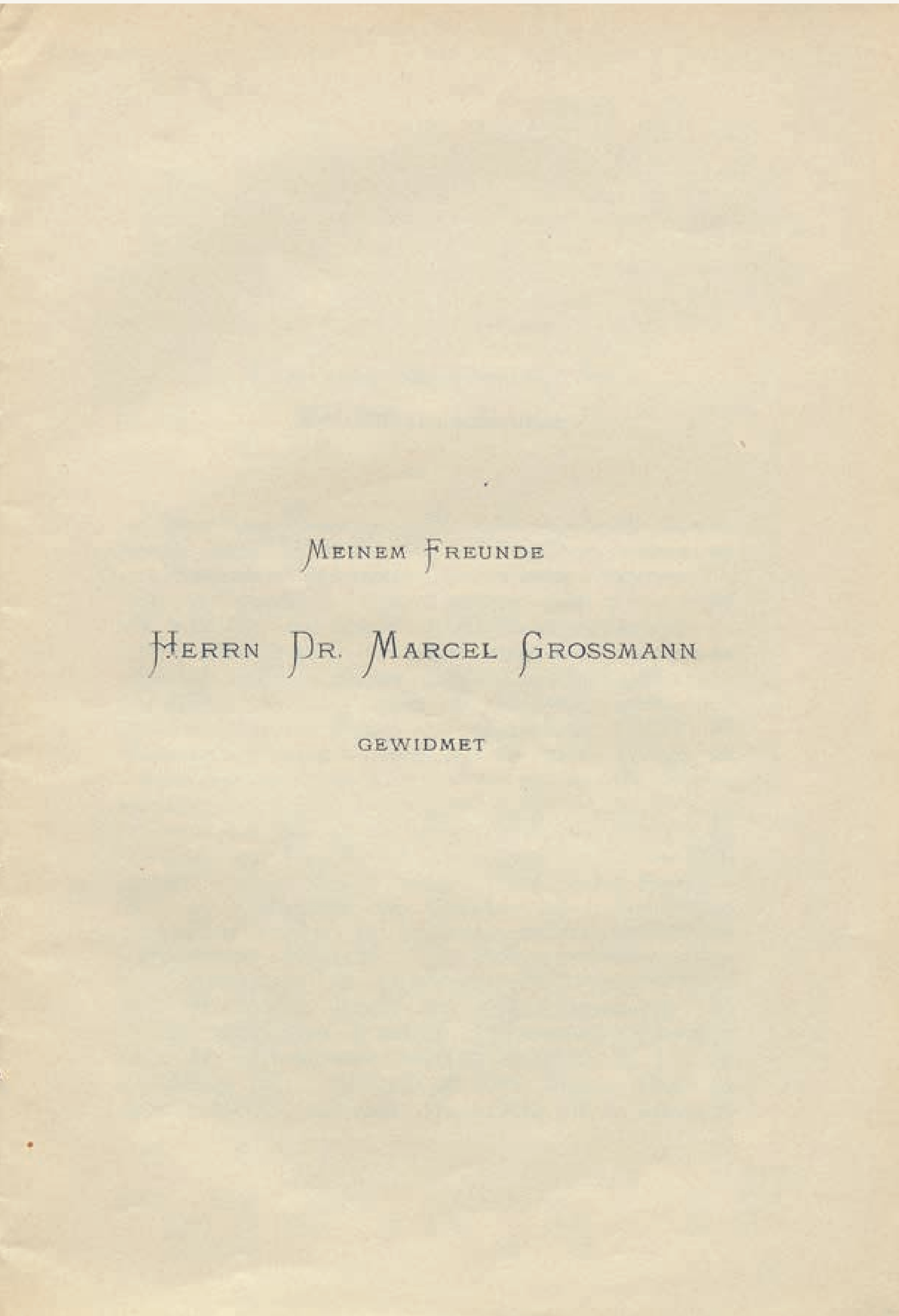
ALBERT EINSTEIN

AUS ZÜRICH

Begutachtet von den Herren Prof. Dr. A. KLEINER
und
Prof. Dr. H. BURKHARDT

BERN
BUCHDRUCKEREI K. J. WYSS
1905

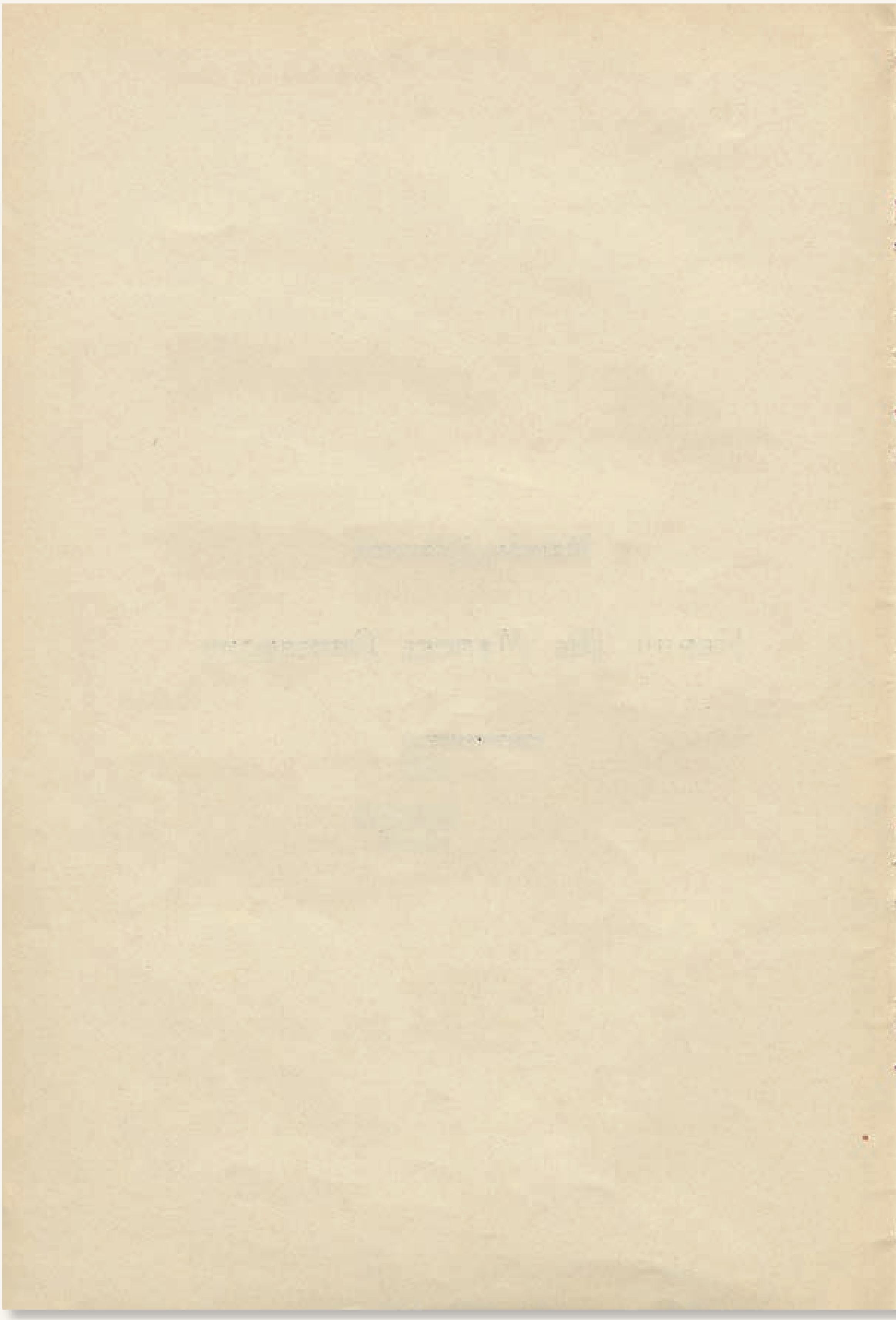

ZENTRALBIBLIOTHEK · ZÜRICH ·



Meinem Freunde

Herrn Dr. Marcel Grossmann

gewidmet



Eine neue Bestimmung der Moleküldimensionen.

Die ältesten Bestimmungen der wahren Grösse der Moleküle hat die kinetische Theorie der Gase ermöglicht, während die an Flüssigkeiten beobachteten physikalischen Phänomene bis jetzt zur Bestimmung der Molekülgrössen nicht gedient haben. Es liegt dies ohne Zweifel an den bisher unüberwindlichen Schwierigkeiten, welche der Entwickelung einer ins einzelne gehenden molekularkinetischen Theorie der Flüssigkeiten entgegenstehen. In dieser Arbeit soll nun gezeigt werden, dass man die Grösse der Moleküle des gelösten Stoffs in einer nicht dissoziierten verdünnten Lösung aus der inneren Reibung der Lösung und des reinen Lösungsmittels und aus der Diffusion des gelösten Stoffes im Lösungsmittel ermitteln kann, wenn das Volumen eines Moleküls des gelösten Stoffs gross ist gegen das Volumen eines Moleküls des Lösungsmittels. Ein derartiges gelöstes Molekül wird sich nämlich bezüglich seiner Beweglichkeit im Lösungsmittel und bezüglich seiner Beeinflussung der inneren Reibung des letzteren annähernd wie ein im Lösungsmittel suspendierter fester Körper verhalten, und es wird erlaubt sein, auf die Bewegung des Lösungsmittels in unmittelbarer Nähe eines Moleküls die hydrodynamischen Gleichungen anzuwenden, in welchen die Flüssigkeit als homogen betrachtet, eine molekulare Struktur derselben also nicht berücksichtigt wird. Als Form der festen Körper, welche die gelösten Moleküle darstellen sollen, wählen wir die Kugelform.

§ 1. Ueber die Beeinflussung der Bewegung einer Flüssigkeit durch eine sehr kleine in derselben suspendierte Kugel.

Es liege eine inkompressible homogene Flüssigkeit mit dem Reibungskoeffizienten k der Betrachtung zugrunde, deren Geschwindigkeitskomponenten u, v, w als Funktionen der Koordinaten x, y, z und der Zeit gegeben seien. Von einem beliebigen Punkt x_0, y_0, z_0 aus denken wir uns die Funktionen u, v, w als Funktionen von $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$ nach dem Taylorschen Satze entwickelt und um diesen Punkt ein so kleines Gebiet G abgegrenzt, dass innerhalb desselben nur die linearen Glieder dieser Entwickelung berücksichtigt werden müssen. Die Bewegung der in G enthaltenen Flüssigkeit kann dann bekanntlich als die Superposition dreier Bewegungen aufgefasst werden, nämlich

1. einer Parallelverschiebung aller Flüssigkeitsteilchen ohne Aenderung von deren relativer Lage,
2. einer Drehung der Flüssigkeit ohne Aenderung der relativen Lage der Flüssigkeitsteilchen,
3. einer Dilatationsbewegung in drei aufeinander senkrechten Richtungen (den Hauptdilatationsrichtungen).

Wir denken uns nun im Gebiete G einen kugelförmigen starren Körper, dessen Mittelpunkt im Punkte x_0, y_0, z_0 liege und dessen Dimensionen gegen diejenigen des Gebietes G sehr klein seien. Wir nehmen ferner an, dass die betrachtete Bewegung eine so langsame sei, dass die kinetische Energie der Kugel sowie diejenige der Flüssigkeit vernachlässigt werden können. Es werde ferner angenommen, dass die Geschwindigkeitskomponenten eines Oberflächenelementes der Kugel mit den entsprechenden Geschwindigkeitskomponenten der unmittelbar benachbarten Flüssigkeitsteilchen übereinstimme, d. h., dass auch die (kontinuierlich gedachte) Trennungsschicht überall einen nicht unendlich kleinen Koeffizienten der inneren Reibung aufweise.

Es ist ohne weiteres klar, dass die Kugel die Teilbewegungen 1. und 2. einfach mitmacht, ohne die Bewegung der benachbarten Flüssigkeit zu modifizieren, da sich bei diesen Teilbewegungen die Flüssigkeit wie ein starrer Körper bewegt, und da wir die Wirkungen der Trägheit vernachlässigt haben.

Die Bewegung 3. aber wird durch das Vorhandensein der Kugel modifiziert, und es wird unsere nächste Aufgabe sein, den Einfluss der Kugel auf diese Flüssigkeitsbewegung zu untersuchen. Beziehen wir die Bewegung 3. auf ein Koordinatensystem, dessen Achsen den Hauptdilatationsrichtungen parallel sind, und setzen wir

$$x - x_0 = \xi,$$
$$y - y_0 = \eta,$$
$$z - z_0 = \zeta,$$

so lässt sich jene Bewegung, falls die Kugel nicht vorhanden ist, durch die Gleichungen darstellen:

$$(1) \qquad \begin{cases} u_0 = A\xi, \\ v_0 = B\eta, \\ w_0 = C\zeta; \end{cases}$$

A, B, C sind Konstanten, welche wegen der Inkompressibilität der Flüssigkeit die Bedingung erfüllen:

$$(2) \qquad A + B + C = 0.$$

Befindet sich nun im Punke x_0, y_0, z_0 die starre Kugel mit dem Radius P, so ändert sich in der Umgebung derselben die Flüssigkeitsbewegung. Im folgenden wollen wir der Bequemlichkeit wegen P als «endlich» bezeichnen, dagegen die Werte von ξ, η, ζ, für welche die Flüssigkeitsbewegung durch die Kugel nicht mehr merklich modifiziert wird, als „unendlich gross".

Zunächst ist wegen der Symmetrie der betrachteten Flüssigkeitsbewegung klar, dass die Kugel bei der betrachteten Bewegung weder eine Translation noch eine Drehung ausführen kann, und wir erhalten die Grenzbedingungen:

$$u = v = w = 0 \text{ für } \rho = P,$$

wobei

$$\rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2} > 0$$

gesetzt ist. Hierbei bedeuten u, v, w die Geschwindigkeitskomponenten der nun betrachteten (durch die Kugel modifizierten) Bewegung. Setzt man

$$(3) \qquad \begin{cases} u = A\xi + u_1, \\ v = B\eta + v_1, \\ w = C\zeta + w_1, \end{cases}$$

so müsste, da die in Gleichungen (3) dargestellte Bewegung im Unendlichen in die in Gleichungen (1) dargestellte über-

— 8 —

gehen soll, die Geschwindigkeiten u_1, v_1, w_1 im Unendlichen verschwinden.

Die Funktionen u, v, w haben den Gleichungen der Hydrodynamik zu genügen unter Berücksichtigung der inneren Reibung und unter Vernachlässigung der Trägheit. Es gelten also die Gleichungen [1])

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial p}{\partial \xi} = k \Delta u \quad \dfrac{\partial p}{\partial \eta} = k \Delta v \quad \dfrac{\partial p}{\partial \zeta} = \Delta w, \\ \qquad \dfrac{\partial u}{\partial \xi} + \dfrac{\partial v}{\partial \eta} + \dfrac{\partial w}{\partial \zeta} = 0, \end{array} \right.$$

wobei Δ den Operator

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2}$$

und p den hydrostatischen Druck bedeutet.

Da die Gleichungen (1) Lösungen der Gleichungen (4) und letztere linear sind, müssen nach (3) auch die Grössen u_1, v_1, w_1 den Gleichungen (4) genügen. Ich bestimmte u_1, v_1, w_1 und p nach einer im § 4 der erwähnten Kirchhoffschen Vorlesung angegebenen Methode [2]) und fand:

---

[1]) G. Kirchhoff, Vorlesungen über Mechanik. 26. Vorl.

[2]) « Aus den Gleichungen (4) folgt $\Delta p = 0$. Ist p dieser Bedingung gemäss angenommen und eine Funktion V bestimmt, die der Gleichung

$$\Delta V = \frac{1}{k} p$$

genügt, so erfüllt man die Gleichungen (4), wenn man

$$u = \frac{\partial V}{\partial \xi} + u', \quad v = \frac{\partial V}{\partial \eta} + v', \quad w = \frac{\partial V}{\partial \zeta} + w'$$

setzt und u', v' w' so wählt, dass $\Delta u' = 0$, $\Delta v' = 0$ und $\Delta w' = 0$ und

$$\frac{\partial u'}{\partial \xi} + \frac{\partial v'}{\partial \eta} + \frac{\partial w'}{\partial \zeta} = -\frac{1}{k} p$$

ist. »

Setzt man nun

$$\frac{p}{k} = 2c \frac{\partial^2 \frac{1}{\rho}}{\partial \xi^2}$$

und im Einklang hiermit

$$V = c \frac{\partial^2 \rho}{\partial \xi^2} + b \frac{\partial^2 \frac{1}{\rho}}{\partial \xi^2} + \frac{a}{2}\left(\xi^2 - \frac{\eta^2}{2} - \frac{\zeta^2}{2}\right)$$

und

$$(5)\begin{cases} p = -\frac{5}{3} k P^3 \left\{ A \dfrac{\partial^2 \left(\frac{1}{\rho}\right)}{\partial \xi^2} + B \dfrac{\partial^2 \left(\frac{1}{\rho}\right)}{\partial \eta^2} + C \dfrac{\partial^2 \left(\frac{1}{\rho}\right)}{\partial \zeta^2} \right\} + \text{konst.}, \\ u = A\xi - \frac{5}{3} P^3 A \dfrac{\xi}{\rho^3} - \dfrac{\partial D}{\partial \xi}, \\ v = B\eta - \frac{5}{3} P^3 B \dfrac{\eta}{\rho^3} - \dfrac{\partial D}{\partial \eta}, \\ w = C\zeta - \frac{5}{3} P^3 C \dfrac{\zeta}{\rho^3} - \dfrac{\partial D}{\partial \zeta}, \end{cases}$$

wobei

$$(5\,a)\begin{cases} D = A \left\{ \frac{5}{6} P^3 \dfrac{\partial^2 \rho}{\partial \xi^2} + \frac{1}{6} P^5 \dfrac{\partial^2 \left(\frac{1}{\rho}\right)}{\partial \xi^2} \right\} \\ \quad + B \left\{ \frac{5}{6} P^3 \dfrac{\partial^2 \rho}{\partial \eta^2} + \frac{1}{6} P^5 \dfrac{\partial^2 \left(\frac{1}{\rho}\right)}{\partial \eta^2} \right\} \\ \quad + C \left\{ \frac{5}{6} P^3 \dfrac{\partial^2 \rho}{\partial \zeta^2} + \frac{1}{6} P^5 \dfrac{\partial^2 \left(\frac{1}{\rho}\right)}{\partial \zeta^2} \right\}. \end{cases}$$

Es ist leicht zu beweisen, dass die Gleichungen (5) Lösungen der Gleichungen (4) sind. Denn da

$$\Delta\,\xi = 0, \quad \Delta\,\frac{1}{\rho} = 0, \quad \Delta\,\rho = \frac{2}{\rho}$$

und

$$\Delta\,\left(\frac{\xi}{\rho^3}\right) = -\frac{\partial}{\partial \xi}\left\{\Delta\,\left(\frac{1}{\rho}\right)\right\} = 0,$$

erhält man

$$k\,\Delta\,u = -k\frac{\partial}{\partial \xi}\{\Delta\,D\} = -k\frac{\partial}{\partial \xi}\left\{\frac{5}{3} P^3 A \frac{\partial^2 \frac{1}{\rho}}{\partial \xi^2} + \frac{5}{3} P^3 B \frac{\partial^2 \frac{1}{\rho}}{\partial \eta^2} + \ldots\right\}.$$

$$u' = -2\,c\,\frac{\partial \frac{1}{\rho}}{\partial \xi}, \quad v' = 0, \quad w' = 0,$$

so lassen sich die Konstanten a, b, c so bestimmen, dass für $\rho = P$ $u = v = w = 0$ ist. Durch Superposition dreier derartiger Lösungen erhält man die in den Gleichungen (5) und (5 a) angegebene Lösung.

Der zuletzt erhaltene Ausdruck ist aber nach der ersten der Gleichungen (5) mit $\frac{\partial n}{\partial \xi}$ identisch. Auf gleiche Weise zeigt man, dass die zweite und dritte der Gleichungen (4) erfüllt ist. Ferner erhält man

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{\partial w}{\partial \zeta} = (A + B + C)$$
$$+ \tfrac{5}{3} P^3 \left\{ A \frac{\partial^2 \left(\frac{1}{\rho}\right)}{\partial \xi^2} + B \frac{\partial^2 \left(\frac{1}{\rho}\right)}{\partial \eta^2} + C \frac{\partial^2 \left(\frac{1}{\rho}\right)}{\partial \zeta^2} \right\} - \Delta D.$$

Da aber nach Gleichung (5a)

$$\Delta D = \tfrac{5}{3} A P^3 \left\{ A \frac{\partial^2 \left(\frac{1}{\rho}\right)}{\partial \xi^2} + B \frac{\partial^2 \left(\frac{1}{\rho}\right)}{\partial \eta^2} + C \frac{\partial^2 \left(\frac{1}{\rho}\right)}{\partial \zeta^2} \right\},$$

so folgt, dass auch die letzte der Gleichungen (4) erfüllt ist. Was die Grenzbedingungen betrifft, so gehen zunächst für unendlich grosse ρ unsere Gleichungen für u, v, w in die Gleichungen (1) über. Durch Einsetzen des Wertes von D aus Gleichung (5a) in die zweite der Gleichungen (5) erhält man:

$$(6) \quad \begin{cases} u = A\xi - \tfrac{5}{2} \dfrac{P^3}{\rho^5} \xi (A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2) \\ \qquad + \tfrac{5}{2} \dfrac{P^5}{\rho^7} \xi (A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2) - \dfrac{P^5}{\rho^5} A\xi. \end{cases}$$

Man erkennt, dass u für $\rho = P$ verschwindet. Gleiches gilt aus Symmetriegründen für v und w. Es ist nun bewiesen, dass durch die Gleichungen (5) sowohl den Gleichungen (4) als auch den Grenzbedingungen der Aufgabe Genüge geleistet ist.

Es lässt sich auch beweisen, dass die Gleichungen (5) die einzige mit den Grenzbedingungen der Aufgabe verträgliche Lösung der Gleichungen (4) sind. Der Beweis soll hier nur angedeutet werden. Es mögen in einem endlichen Raume die Geschwindigkeitskomponenten u, v, w einer Flüssigkeit den Gleichungen (4) genügen. Existierte noch eine andere Lösung U, V, W der Gleichungen (4), bei welcher an den Grenzen des betrachteten Raumes $U = u$, $V = v$, $W = w$ ist, so ist ($U - u$, $V - v$, $W - w$) eine Lösung der Geichungen (4), bei welcher die Geschwindigkeitskomponenten an der Grenze des Raumes verschwinden. Der in dem betrachteten Raume befindlichen Flüssigkeit wird also keine mechanische Arbeit zugeführt. Da wir die lebendige Kraft der Flüssigkeit vernachlässigt haben, so folgt daraus, dass auch die im betrachteten Raume in Wärme verwandelte Arbeit gleich Null ist. Hieraus folgert man, dass im ganzen Raume $u = u_1$, $v = v_1$, $w = w_1$ sein muss, falls der Raum wenigstens zum Teil durch ruhende Wände begrenzt ist. Durch Grenzübergang kann dies Resultat auch auf den Fall ausgedehnt werden, dass, wie in dem oben betrachteten Falle, der betrachtete Raum unendlich ist. Man kann so dartun, dass die oben gefundene Lösung die einzige Lösung der Aufgabe ist.

Wir legen nun um den Punkt x_0, y_0, z_0 eine Kugel vom Radius R, wobei R gegen P unendlich gross sei, und berechnen die Energie, welche in der innerhalb der Kugel befindlichen Flüssigkeit (in der Zeiteinheit) in Wärme verwandelt wird. Diese Energie W ist gleich der der Flüssigkeit mechanisch zugeführten Arbeit. Bezeichnet man die Komponenten des auf die Oberfläche der Kugel vom Radius R ausgeübten Druckes mit X_n, Y_n, Z_n, so ist:

$$W = \int (X_n u + Y_n v + Z_n w)\, d s,$$

wobei das Integral über die Oberfläche der Kugel vom Radius R zu erstrecken ist. Hierbei ist:

$$X_n = -\left(X_\xi \frac{\xi}{\rho} + X_\eta \frac{\eta}{\rho} + X_\zeta \frac{\zeta}{\rho} \right),$$
$$Y_n = -\left(Y_\xi \frac{\xi}{\rho} + Y_\eta \frac{\eta}{\rho} + Y_\zeta \frac{\zeta}{\rho} \right),$$
$$Z_n = -\left(Z_\xi \frac{\xi}{\rho} + Z_\eta \frac{\eta}{\rho} + Z_\zeta \frac{\zeta}{\rho} \right),$$

wobei

$$X_\xi = p - 2k \frac{\partial u}{\partial \xi}, \qquad Y_\zeta = Z_\eta = -k\left(\frac{\partial v}{\partial \zeta} + \frac{\partial w}{\partial \eta}\right),$$
$$Y_\eta = p - 2k \frac{\partial v}{\partial \eta}, \qquad Z_\xi = X_\zeta = -k\left(\frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \zeta}\right),$$
$$Z_\zeta = p - 2k \frac{\partial w}{\partial \zeta}, \qquad X_\eta = Y_\xi = -k\left(\frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\partial v}{\partial \xi}\right).$$

Die Ausdrücke für u, v, w vereinfachen sich, wenn wir beachten, dass für $\rho = R$ die Glieder mit dem Faktor P^3/ρ^3 gegenüber denen mit dem Faktor P/ρ verschwinden. Wir haben zu setzen:

— 12 —

$$(6\,\mathrm{a})\quad\left\{\begin{aligned} u &= A\,\xi - \tfrac{5}{2}\,P^3\,\frac{\xi\,(A\,\xi^2 + B\,\eta^2 + C\,\zeta^2)}{\rho^5}, \\ v &= B\,\eta - \tfrac{5}{2}\,P^3\,\frac{\eta\,(A\,\xi^2 + B\,\eta^2 + C\,\zeta^2)}{\rho^5}, \\ w &= C\,\zeta - \tfrac{5}{2}\,P^3\,\frac{\zeta\,(A\,\xi^2 + B\,\eta^2 + C\,\zeta^2)}{\rho^5}. \end{aligned}\right.$$

Für p erhalten wir aus der ersten der Gleichungen (5) durch die entsprechenden Vernachlässigungen

$$p = -5\,k\,P^3\,\frac{A\,\xi^2 + B\,\eta^2 + C\,\zeta^2}{\rho^5} + \text{konst.}$$

Wir erhalten zunächst:

$$\begin{aligned} X_\xi &= -2\,k\,A + 10\,k\,P^3\,\frac{A\,\xi^2}{\rho^5} - 25\,k\,P^3\,\frac{\xi^2\,(A\,\xi^2 + B\,\eta^2 + C\,\zeta^2)}{\rho^7}, \\ X_\eta &= \qquad\qquad + 10\,k\,P^3\,\frac{A\,\xi\eta}{\rho^5} - 25\,k\,P^3\,\frac{\eta^2\,(A\,\xi^2 + B\,\eta^2 + C\,\zeta^2)}{\rho^7}, \\ X_\zeta &= \qquad\qquad + 10\,k\,P^3\,\frac{A\,\xi\,\zeta}{\rho^5} + 25\,k\,P^3\,\frac{\zeta^2\,(A\,\xi^2 + B\,\eta^2 + C\,\zeta^2)}{\rho^7}, \end{aligned}$$

und hieraus

$$X_n = 2\,A\,k\,\frac{\xi}{\rho} - 10\,A\,k\,P^3\,\frac{\xi}{\rho^4} + 25\,k\,P^3\,\frac{\xi\,(A\,\xi^2 + B\,\eta^2 + C\,\zeta^2)}{\rho^6}.$$

Mit Hilfe der durch zyklische Vertauschung abzuleitenden Ausdrücke für Y_n und Z_n erhält man unter Vernachlässigung aller Glieder, die das Verhältnis P/ρ in einer höheren als der dritten Potenz enthalten:

$$\begin{aligned} X_n\,u + Y_n\,v + Z_n\,w &+ \frac{2\,k}{\rho}\,(A^2\,\xi^2 + B^2\,\eta^2 + C^2\,\zeta^2) \\ &- 10\,k\,\frac{P^3}{\rho^4}(A^2\,\xi^2 + . + .) + 20\,k\,\frac{P^3}{\rho^6}(A\,\xi^2 + . + .)^2. \end{aligned}$$

Integriert man über die Kugel und berücksichtigt, dass

$$\begin{aligned} &\int d\,s = 4\,R^2\,\pi, \\ &\int \xi^2\,d\,s = \int \eta^2\,d\,s = \int \zeta^2\,d\,s = \tfrac{4}{3}\,\pi\,R^4, \\ &\int \xi^4\,d\,s = \int \eta^4\,d\,s = \int \zeta^4\,d\,s = \tfrac{4}{5}\,\pi\,R^6, \\ &\int \eta^2\,\zeta^2\,d\,s = \int \zeta^2\,\xi^2\,d\,s = \int \xi^2\,\eta^2\,d\,s = \tfrac{4}{15}\,\pi\,R^6, \\ &\int (A\,\xi^2 + B\,\eta^2 + C\,\zeta^2)^2\,d\,s = \tfrac{4}{15}\,\pi\,R^6\,(A^2 + B^2 + C^2), \end{aligned}$$

so erhält man:

$$W = \tfrac{8}{3}\,\pi R^3 k\,\delta^2 - \tfrac{8}{3}\,\pi P^3 k\,\delta^2 = 2\,\delta^2 k\,(V - \Phi), \tag{7}$$

wobei

$$\delta = A^2 + B^2 + C^2,$$

$$\tfrac{4}{3}\,\pi R^3 = V$$

und

$$\tfrac{4}{3}\,\pi P^3 = \Phi$$

gesetzt ist. Wäre die suspendierte Kugel nicht vorhanden ($\Phi = 0$), so erhielte man für die im Volumen V verzehrte Energie

$$W_0 = 2\,\delta^2\,k\,V. \tag{7a}$$

Durch das Vorhandensein der Kugel wird also die verzehrte Energie um $2\,\delta^2\,k\,\Phi$ verkleinert. Es ist bemerkenswert, dass der Einfluss der suspendierten Kugel auf die Grösse der verzehrten Energie gerade so gross ist, wie er wäre, wenn durch die Anwesenheit der Kugel die Bewegung der sie umgebenden Flüssigkeit gar nicht modifiziert würde.

§ 2. Berechnung des Reibungskoeffizienten einer Flüssigkeit, in welcher sehr viele kleine Kugeln in regelloser Verteilung suspendiert sind.

Wir haben im vorstehenden den Fall betrachtet, dass in einem Gebiete G von der oben definierten Grössenordnung eine relativ zu diesem Gebiete sehr kleine Kugel suspendiert ist und untersucht, wie dieselbe die Flüssigkeitsbewegung beeinflusst. Wir wollen nun annehmen, dass in dem Gebiete G unendlich viele Kugeln von gleichem, und zwar so kleinem Radius regellos verteilt sind, dass das Volumen aller Kugeln zusammen sehr klein sei gegen das Gebiet G. Die Zahl der auf die Volumeneinheit entfallenden Kugeln sei n, wobei n allenthalben in der Flüssigkeit bis auf Vernachlässigbares konstant sei.

Wir gehen nun wieder aus von einer Bewegung einer homogenen Flüssigkeit ohne suspendierte Kugeln und betrachten wieder die allgemeinste Dilatationsbewegung. Sind keine Kugeln vorhanden, so können wir bei passender Wahl des Koordinatensystems die Geschwindigkeitskomponenten u_0, v_0, w_0 in dem beliebigen Punkte x, y, z des Gebietes G darstellen durch die Gleichungen:

$$u_0 = A x,$$
$$v_0 = B y,$$
$$w_0 = C z,$$

wobei

$$A + B + C = 0.$$

Eine im Punkte x_ν, y_ν, z_ν suspendierte Kugel beeinflusst nun diese Bewegung in der aus Gleichung (6) ersichtlichen Weise. Da wir den mittleren Abstand benachbarter Kugeln als sehr gross gegen deren Radius wählen, und folglich die von allen suspendierten Kugeln zusammen herrührenden zusätzlichen Geschwindigkeitskomponenten gegen u_0, v_0, w_0 sehr klein sind, so erhalten wir für die Geschwindigkeitskomponenten u, v, w in der Flüssigkeit unter Berücksichtigung der suspendierten Kugeln und unter Vernachlässigung von Gliedern höherer Ordnungen:

$$
(8)\quad
\begin{cases}
u = A x - \sum \left\{ \frac{5}{2} \frac{P^3}{\rho_\nu^2} \frac{\xi_\nu (A \xi_\nu^2 + B \eta_\nu^2 + C \zeta_\nu^2)}{\rho_\nu^3} - \frac{5}{2} \frac{P^5}{\rho_\nu^4} \frac{\xi_\nu (A \xi_\nu^2 + B \eta_\nu^2 + C \zeta_\nu^2)}{\rho_\nu^3} + \frac{P^5 A \xi_\nu}{\rho_\nu^4 \rho_\nu} \right\}, \\
v = B y - \sum \left\{ \frac{5}{2} \frac{P^3}{\rho_\nu^2} \frac{\eta_\nu (A \xi_\nu^2 + B \eta_\nu^2 + C \zeta_\nu^2)}{\rho_\nu^3} - \frac{5}{2} \frac{P^5}{\rho_\nu^4} \frac{\eta_\nu (A \xi_\nu^2 + B \eta_\nu^2 + C \zeta_\nu^2)}{\rho_\nu^3} + \frac{P^5 B \eta_\nu}{\rho_\nu^4 \rho_\nu} \right\}, \\
w = C z - \sum \left\{ \frac{5}{2} \frac{P^3}{\rho_\nu^2} \frac{\zeta_\nu (A \xi_\nu^2 + B \eta_\nu^2 + C \zeta_\nu^2)}{\rho_\nu} - \frac{5}{2} \frac{P^5}{\rho_\nu^4} \frac{\zeta_\nu (A \xi_\nu^2 + B \eta_\nu^2 + C \zeta_\nu^2)}{\rho_\nu^3} + \frac{P^5 C \zeta_\nu}{\rho_\nu^4 \rho_\nu} \right\},
\end{cases}
$$

wobei die Summation über alle Kugeln des Gebietes G zu erstrecken ist und

$$\xi_\nu = x - x_\nu,$$
$$\eta_\nu = y - y_\nu, \quad \rho_\nu = \sqrt{\xi_\nu^2 + \eta_\nu^2 + \zeta_\nu^2},$$
$$\zeta_\nu = z - z_\nu,$$

gesetzt ist. x_ν, y_ν, z_ν sind die Koordinaten der Kugelmittelpunkte. Aus den Gleichungen (7) und (7a) schliessen wir ferner, dass die Anwesenheit jeder der Kugeln bis auf unendlich Kleines höherer Ordnung eine Verringerung der Wärmeproduktion pro Zeiteinheit um $2\,\delta^2\,k\,\Phi$ zum Gefolge hat und dass im Gebiete G die pro Volumeneinheit in Wärme verwandelte Energie den Wert hat:

$$W = 2\,\delta^2\,k - 2\,n\,\delta^2\,k\,\Phi,$$

oder

$$W = 2\,\delta^2\,k\,(1 - \varphi), \tag{7 b}$$

wobei φ den von den Kugeln eingenommenen Bruchteil des Volumens bedeutet.

Gleichung (7 b) erweckt den Anschein, als ob der Reibungskoeffizient der von uns betrachteten inhomogenen Mischung von Flüssigkeit und suspendierten Kugeln (im folgenden kurz „Mischung" genannt) kleiner sei als der Reibungskoeffizient k der Flüssigkeit. Dies ist jedoch nicht der Fall, da A, B, C nicht die Werte der Hauptdilatationen der in Gleichungen (8) dargestellten Flüssigkeitsbewegung sind; wir wollen die Hauptdilatationen der Mischung A^*, B^*, C^* nennen. Aus Symmetriegründen folgt, dass die Hauptdilatationsrichtungen der Mischung den Richtungen der Hauptdilatationen A, B, C, also den Koordinatenrichtungen parallel sind. Schreiben wir die Gleichungen (8) in der Form:

$$u = A\,x + \sum u_\nu\,,$$

$$v = B\,y + \sum v_\nu\,,$$

$$w = C\,z + \sum w_\nu\,,$$

so erhalten wir:

$$A^* = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=0} = A + \sum\left(\frac{\partial u_\nu}{\partial x}\right)_{x=0} = A - \sum\left(\frac{\partial u_\nu}{\partial x_\nu}\right)_{x=0}.$$

Schliessen wir die unmittelbaren Umgebungen der einzelnen Kugeln von der Betrachtung aus, so können wir die zweiten und dritten Glieder der Ausdrücke von u, v, w weglassen und erhalten für $x = y = z = 0$:

$$
(9) \quad \left\{ \begin{aligned}
u_\nu &= -\tfrac{5}{2} \frac{P^3}{r_\nu^2} \frac{x_\nu (A x_\nu^2 + B y_\nu^2 + C z_\nu^2)}{r_\nu^3}, \\
v_\nu &= -\tfrac{5}{2} \frac{P^3}{r_\nu^2} \frac{y_\nu (A x_\nu^2 + B y_\nu^2 + C z_\nu^2)}{r_\nu^3}, \\
w_\nu &= -\tfrac{5}{2} \frac{P^3}{r_\nu^2} \frac{x (A x_\nu^2 + B y_\nu^2 + C z_\nu^2)}{r_\nu^3},
\end{aligned} \right.
$$

wobei

$$r_\nu = \sqrt{x_\nu^2 + y_\nu^2 + z_\nu^2} > 0$$

gesetzt ist. Die Summierung erstrecken wir über das Volumen einer Kugel K von sehr grossem Radius R, deren Mittelpunkt im Koordinatenursprung liegt. Betrachten wir ferner die *regellos* verteilten Kugeln als *gleichmässig* verteilt und setzen an Stelle der Summe ein Integral, so erhalten wir:

$$
\begin{aligned}
A^* &= A - n \int_K \frac{\partial u_\nu}{\partial x_\nu} \, d x_\nu \, d y_\nu \, d z_\nu, \\
&= A - n \int \frac{u_\nu x_\nu}{r_\nu} \, d s,
\end{aligned}
$$

wobei das letzte Integral über die Oberfläche der Kugel K zu erstrecken ist. Wir finden unter Berücksichtigung von (9):

$$
\begin{aligned}
A^* &= A - \tfrac{5}{2} \frac{P^3}{R^6} n \int x_0^2 (A x_0^2 + B y_0^2 + C z_0^2) \, d s, \\
&= A - n \left(\tfrac{4}{3} P^3 \pi\right) A = A (1 - \varphi).
\end{aligned}
$$

Analog ist

$$
\begin{aligned}
B^* &= B (1 - \varphi), \\
C^* &= C (1 - \varphi).
\end{aligned}
$$

Setzen wir

$$\delta^{*2} = A^{*2} + B^{*2} + C^{*2},$$

so ist bis auf unendlich Kleines höherer Ordnung:

$$\delta^{*2} = \delta^2 \, (1 - 2 \varphi).$$

Wir haben für die Wärmeentwicklung pro Zeit- und Volumeneinheit gefunden:

$$W^* = 2 \, \delta^2 \, k \, (1 - \varphi).$$

Bezeichnen wir mit k^* den Reibungskoeffizienten des Gemisches, so ist:

$$W^* = 2\,\delta^{*2}\,k^*.$$

Aus den drei letzten Gleichungen erhält man unter Vernachlässigung von unendlich Kleinem höherer Ordnung:

$$k^* = k\,(1 + \varphi).$$

Wir erhalten also das Resultat:

Werden in einer Flüssigkeit sehr kleine starre Kugeln suspendiert, so wächst dadurch der Koeffizient der inneren Reibung um einen Bruchteil, der gleich ist dem Gesamtvolumen der in der Volumeneinheit suspendierten Kugeln, vorausgesetzt, dass dieses Gesamtvolumen sehr klein ist.

§ 3. Ueber das Volumen einer gelösten Substanz, deren Molekularvolumen gross ist gegenüber dem des Lösungsmittels.

Es liege eine verdünnte Lösung vor eines Stoffes, welcher in der Lösung nicht dissoziiert. Ein Molekül des gelösten Stoffes sei gross gegenüber einem Molekül des Lösungsmittels und werde als starre Kugel vom Radius P aufgefasst. Wir können dann das in § 2 gewonnene Resultat anwenden. Bedeutet k^* den Reibungskoeffizienten der Lösung, k denjenigen des reinen Lösungsmittels, so ist:

$$\frac{k^*}{k} = 1 + \varphi,$$

wobei φ das Gesamtvolumen der in Lösung befindlichen Moleküle pro Volumeneinheit ist.

Wir wollen φ für eine 1 proz. wässerige Zuckerlösung berechnen. Nach Beobachtungen von Burkhard (Tabellen von Landolt und Börnstein) ist bei einer 1 proz. wässerigen Zuckerlösung $k^*/k = 1{,}0245$ (bei 20° C.), also $\varphi = 0{,}0245$ für (beinahe genau) 0,01 g Zucker. Ein Gramm in Wasser gelöster Zucker hat also auf den Reibungskoeffizienten denselben Einfluss wie kleine suspendierte starre Kugeln vom Gesamtvolumen 2,45 cm³. Bei dieser Betrachtung ist der Einfluss des dem gelösten Zucker entsprechenden osmotischen Druckes auf die innere Reibung des Lösungsmittels vernachlässigt.

Es ist nun daran zu erinnern, dass 1 g festen Zuckers das Volumen 0,61 cm³ besitzt. Dasselbe Volumen findet man auch für das spezifische Volumen s des in Lösung befindlichen Zuckers, wenn man die Zuckerlösung als eine *Mischung* von Wasser und Zucker in gelöster Form auffasst. Die Dichte einer 1 proz. wässerigen Zuckerlösung (bezogen auf Wasser von derselben Temperatur) bei 17,5° ist nämlich 1,00388. Man hat also (unter Vernachlässigung des Dichteunterschiedes von Wasser von 4° und Wasser von 17,5°):

$$\frac{1}{1,00388} = 0,99 + 0,01\, s;$$

also

$$s = 0,61.$$

Während also die Zuckerlösung, was ihre Dichte anbelangt, sich wie eine Mischung von Wasser und festem Zucker verhält, ist der Einfluss auf die innere Reibung viermal grösser, als er aus der Suspendierung der gleichen Zuckermenge resultieren würde. Es scheint mir dies Resultat im Sinne der Molekulartheorie kaum anders gedeutet werden zu können, als indem man annimmt, dass das in Lösung befindliche Zuckermolekül die Beweglichkeit des unmittelbar angrenzenden Wassers hemme, so dass ein Quantum Wasser, dessen Volumen ungefähr das Dreifache des Volumens des Zuckermoleküls ist, an das Zuckermolekül gekettet ist.

Wir können also sagen, dass ein gelöstes Zuckermolekül (bezw. das Molekül samt dem durch dasselbe festgehaltene Wasser) in hydrodynamischer Beziehung sich verhält wie eine Kugel vom Volumen $2,45 \,.\, 342/N$ cm³, wobei 342 das Molekulargewicht des Zuckers und N die Anzahl der wirklichen Moleküle in einem Grammolekül ist.

§ 4. Ueber die Diffusion eines nicht dissoziierten Stoffes in flüssiger Lösung.

Es liege eine Lösung vor, wie sie in § 3 betrachtet wurde. Wirkt auf das Molekül, welches wir als eine Kugel vom Radius P betrachten, eine Kraft K, so bewegt sich das Molekül mit einer Geschwindigkeit ω, welche durch P und den Reibungskoeffizienten k des Lösungsmittels bestimmt ist. Es besteht nämlich die Gleichung[1]):

$$\omega = \frac{K}{6\pi k P}. \tag{1}$$

Diese Beziehung benutzen wir zur Berechnung des Diffusionskoeffizienten einer nicht dissoziierten Lösung. Bedeutet p den osmotischen Druck der gelösten Substanz, welcher bei der betrachteten verdünnten Lösung als die einzige bewegende Kraft anzusehen sei, so ist die auf die gelöste Substanz pro Volumeneinheit der Lösung in Richtung der X-Achse ausgeübte Kraft $= -\partial p / \partial x$. Befinden sich ρ Gramm in der Volumeneinheit und ist m das Molekulargewicht des gelösten Stoffes, N die Anzahl wirklicher Moleküle in einem Grammolekül, so ist $(\rho/m) \cdot N$ die Anzahl der (wirklichen) Moleküle in der Volumeneinheit und die auf ein Molekül infolge des Konzentrationsgefälles wirkende Kraft:

$$K = -\frac{m}{\rho N} \frac{\partial p}{\partial x}. \tag{2}$$

Ist die Lösung genügend verdünnt, so ist der osmotische Druck durch die Gleichung gegeben:

$$p = \frac{R}{m} \rho T, \tag{3}$$

wobei T die absolute Temperatur und $R = 8{,}31 \cdot 10^7$ ist. Aus den Gleichungen (1), (2) und (3) erhalten wir für die Geschwindigkeit der Wanderung der gelösten Substanz:

$$\omega = -\frac{RT}{6\pi k} \frac{1}{NP} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x}.$$

Die pro Zeiteinheit durch die Einheit des Querschnittes in Richtung der X-Achse hindurchtretende Stoffmenge ist endlich

$$\omega \rho = -\frac{RT}{6\pi k} \cdot \frac{1}{NP} \frac{\partial \rho}{\partial x}. \tag{4}$$

Wir erhalten also für den Diffusionskoeffizienten D:

$$D = \frac{RT}{6\pi k} \cdot \frac{1}{NP}.$$

1) G. Kirchhoff, Vorlesungen über Mechanik. 26. Vorl., Gl. (22).

Man kann also aus dem Diffusionskoeffizienten und dem Koeffizienten der inneren Reibung des Lösungsmittels das Produkt aus der Anzahl N der wirklichen Moleküle in einem Grammolekül und dem hydrodynamisch wirksamen Molekularradius P berechnen.

In dieser Ableitung ist der osmotische Druck wie eine auf die einzelnen Moleküle wirkende Kraft behandelt worden, was offenbar der Auffassung der kinetischen Molekulartheorie nicht entspricht, da gemäss letzterer in dem vorliegenden Falle der osmotische Druck nur als eine scheinbare Kraft aufzufassen ist. Diese Schwierigkeit verschwindet jedoch, wenn man bedenkt, dass den (scheinbaren) osmotischen Kräften, welche den Konzentrationsverschiedenheiten der Lösung entsprechen, durch ihnen numerisch gleiche, entgegengesetzt gerichtete, auf die einzelnen Moleküle wirkende Kräfte das (dynamische) Gleichgewicht geleistet werden kann, wie auf thermodynamischem Wege leicht eingesehen werden kann.

Der auf die Masseneinheit wirkenden osmotischen Kraft $-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$ kann durch die (an den einzelnen gelösten Molekülen angreifende) Kraft $-P_x$ das Gleichgewicht geleistet werden, wenn

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} - P_x = 0.$$

Denkt man sich also an der gelösten Substanz (pro Masseneinheit) die zwei sich gegenseitig aufhebenden Kräftesysteme P_x und $-P_x$ angreifend, so leistet $-P_x$ dem osmotischen Drucke das Gleichgewicht, und es bleibt nur die dem osmotischen Drucke numerisch gleiche Kraft P_x als Bewegungsursache übrig. Damit ist die erwähnte Schwierigkeit beseitigt.[1])

§ 5. Bestimmung der Moleküldimensionen mit Hilfe der erlangten Relationen.

Wir haben in § 3 gefunden:

$$\frac{k^*}{k} = 1 + \varphi = 1 + n \cdot \tfrac{4}{3}\pi P^3,$$

wobei n die Anzahl der gelösten Moleküle pro Volumeneinheit und P den hydrodynamisch wirksamen Molekülradius bedeutet. Berücksichtigt man, dass

[1]) Eine ausführliche Darlegung dieses Gedankenganges findet sich in Ann. d. Phys. 17. p. 549. 1905.

$$\frac{n}{N} = \frac{\rho}{m},$$

wobei ρ die in der Volumeneinheit befindliche Masse des gelösten Stoffes und m dessen Molekulargewicht bedeutet, so erhält man:

$$N P^3 = \frac{3}{4\pi} \frac{m}{\rho} \left(\frac{k^*}{k} - 1 \right)$$

Andererseits wurde in § 4 gefunden:

$$N P = \frac{R T}{6 \pi k} \frac{1}{D}.$$

Diese beiden Gleichungen setzen uns in den Stand, die Grössen P und N einzeln zu berechnen, von welchen sich N als unabhängig von der Natur des Lösungsmittels, der gelösten Substanz und der Temperatur herausstellen muss, wenn unsere Theorie den Tatsachen entspricht.

Wir wollen die Rechnung für wässerige Zuckerlösung durchführen. Nach den oben mitgeteilten Angaben über die innere Reibung der Zuckerlösung folgt zunächst für 20° C:

$$N P^3 = 200.$$

Nach Versuchen von Graham (berechnet von Stefan) ist der Diffusionskoeffizient von Zucker in Wasser bei 9,5° C. 0,384, wenn der Tag als Zeiteinheit gewählt wird. Die Zähigkeit des Wassers bei 9,5° ist 0,0135. Wir wollen diese Daten in unsere Formel für den Diffusionskoeffizienten einsetzen, trotzdem sie an 10 proz. Lösungen gewonnen sind und eine genaue Gültigkeit unserer Formel bei so hohen Konzentrationen nicht zu erwarten ist. Wir erhalten

$$N P = 2{,}08 \, . \, 10^{16}.$$

Aus den für $N P^3$ und $N P$ gefundenen Werten folgt, wenn wir die Verschiedenheit von P bei 9,5° und 20° vernachlässigen,

$$P = 9{,}9 \, . \, 10^{-8} \text{ cm},$$
$$N = 2{,}1 \, . \, 10^{23}.$$

Der für N gefundene Wert stimmt der Grössenordnung nach mit den durch andere Methoden gefundenen Werten für diese Grösse befriedigend überein.

Bern, den 30. April 1905.

The Adventurous Journey of a Diploma

Albert Einstein's doctoral certificate has traveled the world. After the diploma awarded to the physicist in 1906 was found in the attic of Mileva Einstein's former home in Zurich in the 1940s, it went to Latin America. About 10 years ago, it reappeared in Switzerland. Now it is on public display at the University of Zurich.

The 26-year-old Albert Einstein submitted his doctoral thesis to the University of Zurich in 1905. One year later, in January 1906, the mathematics and natural science section of the Faculty of Philosophy awarded him the title Doctor of Philosophy. Looking at the certificate, you may be surprised by its size: the document measures 69.8 x 52.3 cm and is therefore a giant poster compared to the current A4 diplomas. But it is not only its size, but also its history that gives the doctoral certificate of the greatest physicist of the 20th century very special significance.

Between 1906 and 1948 little is known about the whereabouts of the certificate, except that of course it was handed over to Einstein in person upon graduation. But in 1948, its circuitous journey began: that year, a young student from the Canton of Schwyz moved into the house at Huttenstrasse 62 in Zurich. A relative rented him a room in the house, conveniently located for the universities UZH and ETH. When he moved in, the young man was supposed to make himself useful. The owner of the house sent him to the attic to look for wallpaper because ink was staining the wall of his room. He found the wallpaper. But to his surprise, he also held Albert Einstein's doctoral certificate from the University of Zurich and an honorary doctoral certificate from the University of Geneva in his hands. The owner of the house let him keep the two documents.

The reason the documents were stored there is simple. The house at Huttenstrasse 62 had previously belonged to Mileva Marić – Albert Einstein's first wife. She lived there after their divorce in 1919 until she passed away in August 1948. The certificates, which neither the celebrated physicist himself nor his family were apparently interested in at the time, were forgotten – or deliberately left – in the attic when the house was cleared.

In the early 1950s, the former student from Schwyz, now an engineer, emigrated to Peru and took the certificates with him. In 1955, news of Albert Einstein's death spread quickly around the world. The Swiss engineer in Lima now had to consider that the two certificates in his possession could take on a new meaning and significance with Einstein's passing – and a new value.

In accordance with Einstein's will of 1950, his estate went to the Hebrew University of Jerusalem, which today houses the Albert Einstein Archives. In May 1955, the executor of Einstein's will, Otto Nathan, received copies of the two certificates. Did the Swiss emigrant make the archive an offer for purchase? We don't know. What we do know, however, is that he wanted to ensure that the certificates were the originals. In 1957, he therefore commissioned the Vice Consul of the United States of America in Lima to prepare a certificate of authenticity for the documents. In a sealed letter, the government official, who described himself as "duly commissioned and certified" for this job, declared that there was no doubt about the originality of the doctoral certificates presented to him.

Nevertheless, the holder of Einstein's diploma decided many years later to part with the long-guarded papers. In 2009, by which time the engineer had returned to Switzerland, the document was bought at auction by an unknown person from Jerusalem. But that was not the end of the journey. Thirteen years later, the certificate turned up again, this time in New York. In the spring of 2022, an Einstein expert informed the Executive Board of the University of Zurich that the doctoral certificate was up for sale again. The idea that this important piece of contemporary history should return to the place of its creation was met with enthusiasm. The opportunity to make Albert Einstein's doctoral diploma available to a broad public and to honor the outstanding alumnus on the occasion of the 100th anniversary of his Nobel Prize was unique and unmissable. Thanks to a donation given to the UZH Foundation, the University of Zurich was able to acquire the original certificate and bring it back to Switzerland.

The poster-sized certificate is now on public display in the main building of the University of Zurich, only a few minutes away from the house at Huttenstrasse 62 where the Einstein family had left it. The journey taken by the document is extraordinary and thus a fitting reflection of Albert Einstein's life and work.

Albert Einstein's original doctoral certificate from 1906
©The University of Zurich


UNTER DER OBERHOHEIT DER BEHÖRDEN UND DES VOLKES DES KANTONS

UND IM NAMEN DER

UNIVERSITÄT ZÜRICH

HAT DIE

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE SEKTION

DER

PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT

IN IHRER SITZUNG VOM 27. JULI 1905

DEM HERRN

ALBERT EINSTEIN

VON ZÜRICH

AUF GRUND SEINER DISSERTATION, BETITELT:

„EINE NEUE BESTIMMUNG DER MOLEKÜLDIMENSIONEN"

UND DER VORSCHRIFTSMÄSSIGEN PRÜFUNGSAUSWEISE

DIE RECHTE UND WÜRDEN

EINES

DOCTOR DER PHILOSOPHIE

VERLIEHEN

UND STELLT ZUM ZEUGNIS DESSEN DIESE MIT DEM UNIVERSITÄTSSTEMPEL VERSEHENE URKUNDE AUS

GEGEBEN IN ZÜRICH

15. JANUAR 1906.

FÜR DEN AKADEMISCHEN SENAT

DER REKTOR:

FÜR DIE II. SEKTION DER PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT

DER DEKAN:

$E = mc^2$ – Four Further Strokes of Genius

Besides his doctoral thesis, Albert Einstein published four other papers in the scientific journal *Annalen der Physik* in 1905 that were to revolutionize physics. In March of that year, and therefore prior to his doctoral thesis, he completed his study on the photoelectric effect. Published under the title "On a Heuristic Point of View Concerning the Production and Transformation of Light", it would go on to earn him the Nobel Prize. Einstein's third paper, building upon discoveries elucidated in his doctoral thesis, dealt with Brownian motion – the irregular thermal movements of small particles in liquids and gases. His explanation of this motion was published under the title "On the Movement of Small Particles Suspended in Stationary Liquids Required by the Molecular-Kinetic Theory of Heat", and is considered another important step toward conclusive proof of the existence of molecules and atoms.

The final two papers that would ultimately transform the world of physics were "On the Electrodynamics of Moving Bodies" and the addendum "Does the Inertia of a Body Depend upon its Energy Content?", written shortly afterwards. Together they became famously known as the Special Theory of Relativity. This is the theory that laid the foundations for the now-familiar formula $E=mc^2$, in which Einstein linked together the concepts of mass and energy. He later expanded the Special Theory of Relativity into the Theory of General Relativity.

Albert Einstein at the patent office in Bern, where he worked in 1905 when the four groundbreaking papers were published
Photo: The ETH Library Zurich, Image Archive

On the Movement of Small Particles Suspended in Stationary Liquids Required by the Molecular-Kinetic Theory of Heat

5. *Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen;*

von A. Einstein.

In dieser Arbeit soll gezeigt werden, daß nach der molekularkinetischen Theorie der Wärme in Flüssigkeiten suspendierte Körper von mikroskopisch sichtbarer Größe infolge der Molekularbewegung der Wärme Bewegungen von solcher Größe ausführen müssen, daß diese Bewegungen leicht mit dem Mikroskop nachgewiesen werden können. Es ist möglich, daß die hier zu behandelnden Bewegungen mit der sogenannten „Brownschen Molekularbewegung" identisch sind; die mir erreichbaren Angaben über letztere sind jedoch so ungenau, daß ich mir hierüber kein Urteil bilden konnte.

Wenn sich die hier zu behandelnde Bewegung samt den für sie zu erwartenden Gesetzmäßigkeiten wirklich beobachten läßt, so ist die klassische Thermodynamik schon für mikroskopisch unterscheidbare Räume nicht mehr als genau gültig anzusehen und es ist dann eine exakte Bestimmung der wahren Atomgröße möglich. Erwiese sich umgekehrt die Voraussage dieser Bewegung als unzutreffend, so wäre damit ein schwerwiegendes Argument gegen die molekularkinetische Auffassung der Wärme gegeben.

§ 1. Über den suspendierten Teilchen zuzuschreibenden osmotischen Druck.

Im Teilvolumen V^* einer Flüssigkeit vom Gesamtvolumen V seien z-Gramm-Moleküle eines Nichtelektrolyten gelöst. Ist das Volumen V^* durch eine für das Lösungsmittel, nicht aber für die gelöste Substanz durchlässige Wand vom reinen Lösungsmittel getrennt, so wirkt auf diese Wand der sogenannte osmotische Druck, welcher bei genügend großen Werten von V^*/z der Gleichung genügt:

$$p V^* = R T z .$$

Sind hingegen statt der gelösten Substanz in dem Teilvolumen V^* der Flüssigkeit kleine suspendierte Körper vorhanden, welche ebenfalls nicht durch die für das Lösungsmittel durchlässige Wand hindurchtreten können, so hat man nach der klassischen Theorie der Thermodynamik — wenigstens bei Vernachlässigung der uns hier nicht interessierenden Schwerkraft — nicht zu erwarten, daß auf die Wand eine Kraft wirke; denn die „freie Energie" des Systems scheint nach der üblichen Auffassung nicht von der Lage der Wand und der suspendierten Körper abzuhängen, sondern nur von den Gesamtmassen und Qualitäten der suspendierten Substanz, der Flüssigkeit und der Wand, sowie von Druck und Temperatur. Es kämen allerdings für die Berechnung der freien Energie noch Energie und Entropie der Grenzflächen in Betracht (Kapillarkräfte); hiervon können wir jedoch absehen, indem bei den ins Auge zu fassenden Lagenänderungen der Wand und der suspendierten Körper Änderungen der Größe und Beschaffenheit der Berührungsflächen nicht eintreten mögen.

Vom Standpunkte der molekularkinetischen Wärmetheorie aus kommt man aber zu einer anderen Auffassung. Nach dieser Theorie unterscheidet sich eingelöstes Molekül von einem suspendierten Körper *lediglich* durch die Größe, und man sieht nicht ein, warum einer Anzahl suspendierter Körper nicht derselbe osmotische Druck entsprechen sollte, wie der nämlichen Anzahl gelöster Moleküle. Man wird anzunehmen haben, daß die suspendierten Körper infolge der Molekularbewegung der Flüssigkeit eine wenn auch sehr langsame ungeordnete Bewegung in der Flüssigkeit ausführen; werden sie durch die Wand verhindert, das Volumen V^* zu verlassen, so werden sie auf die Wand Kräfte ausüben, ebenso wie gelöste Moleküle. Sind also n suspendierte Körper im Volumen V^*, also $n/V^* = \nu$ in der Volumeneinheit vorhanden, und sind benachbarte unter ihnen genügend weit voneinander entfernt, so wird ihnen ein osmotischer Druck p entsprechen von der Größe:

$$p = \frac{R\,T}{V^*}\,\frac{n}{N} = \frac{R\,T}{N}\cdot \nu\,,$$

wobei N die Anzahl der in einem Gramm-Molekül enthaltenen wirklichen Moleküle bedeutet. Im nächsten Paragraph soll gezeigt werden, daß die molekularkinetische Theorie der Wärme wirklich zu dieser erweiterten Auffassung des osmotischen Druckes führt.

§ 2. Der osmotische Druck vom Standpunkte der molekularkinetischen Theorie der Wärme.[1])

Sind $p_1\, p_2 \ldots p_l$ Zustandsvariable, eines physikalischen Systems, welche den momentanen Zustand desselben vollkommen bestimmen (z. B. die Koordinaten und Geschwindigkeitskomponenten aller Atome des Systems) und ist das vollständige System der Veränderungsgleichungen dieser Zustandsvariabeln von der Form

$$\frac{\partial p_\nu}{\partial t} = \varphi_\nu(p_1 \ldots p_l)(\nu = 1, 2 \ldots l)$$

gegeben, wobei $\Sigma \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial p_\nu} = 0$, so ist die Entropie des Systems durch den Ausdruck gegeben:

$$S = \frac{\bar{E}}{T} + 2\varkappa \lg \int e^{-\frac{E}{2\varkappa T}}\, d p_1 \ldots d p_l\,.$$

Hierbei bedeutet T die absolute Temperatur, $\bar{E}$ die Energie des Systems, E die Energie als Funktion der p_ν. Das Integral ist über alle mit den Bedingungen des Problems vereinbaren Wertekombinationen der p_ν zu erstrecken. $\varkappa$ ist mit der oben erwähnten Konstanten N durch die Relation $2\varkappa N = R$ verbunden. Für die freie Energie F erhalten wir daher:

$$F = -\frac{R}{N}\,T \lg \int e^{-\frac{E N}{R T}}\, d p_1 \ldots d p_l = -\frac{R\,T}{N} \lg B\,.$$

1) In diesem Paragraph sind die Arbeiten des Verfassers über die Grundlagen der Thermodynamik als bekannt vorausgesetzt (vgl. Ann. d. Phys. **9.** p. 417. 1902; **11.** p. 170. 1903). Für das Verständnis der Resultate der vorliegenden Arbeit ist die Kenntnis jener Arbeiten sowie dieses Paragraphen der vorliegenden Arbeit entbehrlich.

Wir denken uns nun eine in dem Volumen V eingeschlossene Flüssigkeit; in dem Teilvolumen V^* von V mögen sich n gelöste Moleküle bez. suspendierte Körper befinden, welche im Volumen V^* durch eine semipermeabele Wand festgehalten seien; es werden hierdurch die Integrationsgrenzen des in den Ausdrücken für S und F auftretenden Integrales B beeinflußt. Das Gesamtvolumen der gelösten Moleküle bez. suspendierten Körper sei klein gegen V^*. Dies System werde im Sinne der erwähnten Theorie durch die Zustandsvariabeln $p_1 \ldots p_l$ vollständig dargestellt.

Wäre nun auch das molekulare Bild bis in alle Einzelheiten festgelegt, so böte doch die Ausrechnung des Integrales B solche Schwierigkeiten, daß an eine exakte Berechnung von F kaum gedacht werden könnte. Wir brauchen jedoch hier nur zu wissen, wie F von der Größe des Volumens V^* abhängt, in welchem alle gelösten Moleküle bez. suspendierten Körper (im folgenden kurz „Teilchen" genannt) enthalten sind.

Wir nennen x_1, y_1, z_1 die rechtwinkligen Koordinaten des Schwerpunktes des ersten Teilchens, x_2, y_2, z_2 die des zweiten etc., x_n, y_n, z_n die des letzten Teilchens und geben für die Schwerpunkte der Teilchen die unendlich kleinen parallelepipedförmigen Gebiete $d x_1\, d y_1\, d z_1$, $d x_2\, d y_2\, d z_2 \ldots d x_n\, d y_n\, d z_n$, welche alle in V^* gelegen seien. Gesucht sei der Wert des im Ausdruck für F auftretenden Integrales mit der Beschränkung, daß die Teilchenschwerpunkte in den ihnen soeben zugewiesenen Gebieten liegen. Dies Integral läßt sich jedenfalls auf die Form

$$d B = d x_1\, d y_1 \ldots d z_n \,.\, J$$

bringen, wobei J von $d x_1\, d y_1$ etc., sowie von V^*, d. h. von der Lage der semipermeabeln Wand, unabhängig ist. J ist aber auch unabhängig von der speziellen Wahl *der Lagen* der Schwerpunktsgebiete und von dem Werte von V^*, wie sogleich gezeigt werden soll. Sei nämlich ein zweites System von unendlich kleinen Gebieten für die Teilchenschwerpunkte gegeben und bezeichnet durch $d x_1'\, d y_1'\, d z_1'$, $d x_2'\, d y_2'\, d z_2' \ldots d x_n'\, d y_n'\, d z_n'$, welche Gebiete sich von den ursprünglich gegebenen nur durch ihre Lage, nicht aber durch ihre Größe unterscheiden mögen und ebenfalls alle in V^* enthalten seien, so gilt analog:

$$d B' = d x_1'\, d y_1' \ldots d z_n' \,.\, J',$$

wobei

$$d x_1 \, d y_1 \ldots d z_n = d x'_1 \, d y'_1 \ldots d z'_n .$$

Es ist also:

$$\frac{d B}{d B'} = \frac{J}{J'} .$$

Aus der in den zitierten Arbeiten gegebenen molekularen Theorie der Wärme läßt sich aber leicht folgern[1]), daß $d B / B$ bez. $d B' / B$ gleich ist der Wahrscheinlichkeit dafür, daß sich in einem beliebig herausgegriffenen Zeitpunkte die Teilchenschwerpunkte in den Gebieten $(d x_1 \ldots d z_n)$ bez. in den Gebieten $(d x'_1 \ldots d z'_n)$ befinden. Sind nun die Bewegungen der einzelnen Teilchen (mit genügender Annäherung) voneinander unabhängig, ist die Flüssigkeit homogen und wirken auf die Teilchen keine Kräfte, so müssen bei gleicher Größe der Gebiete die den beiden Gebietssystemen zukommenden Wahrscheinlichkeiten einander gleich sein, so daß gilt:

$$\frac{d B}{B} = \frac{d B'}{B} .$$

Aus dieser und aus der zuletzt gefundenen Gleichung folgt aber

$$J = J' .$$

Es ist somit erwiesen, daß J weder von V^* noch von $x_1, y_1 \ldots z_n$ abhängig ist. Durch Integration erhält man

$$B = \int J \, d x_1 \ldots d z_n = J \, V^{*n}$$

und daraus

$$F = - \frac{R T}{N} \{ \lg J + n \lg V^* \}$$

und

$$p = - \frac{\partial F}{\partial V^*} = \frac{R T}{V^*} \frac{n}{N} = \frac{R T}{N} \nu .$$

Durch diese Betrachtung ist gezeigt, daß die Existenz des osmotischen Druckes eine Konsequenz der molekularkinetischen Theorie der Wärme ist, und daß nach dieser Theorie gelöste Moleküle und suspendierte Körper von gleicher Anzahl sich in bezug auf osmotischen Druck bei großer Verdünnung vollkommen gleich verhalten.

1) **A. Einstein, Ann. d. Phys. 11. p. 170. 1903.**

§ 3. **Theorie der Diffusion kleiner suspendierter Kugeln.**

In einer Flüssigkeit seien suspendierte Teilchen regellos verteilt. Wir wollen den dynamischen Gleichgewichtszustand derselben untersuchen unter der Voraussetzung, daß auf die einzelnen Teilchen eine Kraft K wirkt, welche vom Orte, nicht aber von der Zeit abhängt. Der Einfachheit halber werde angenommen, daß die Kraft überall die Richtung der X-Achse habe.

Es sei ν die Anzahl der suspendierten Teilchen pro Volumeneinheit, so ist im Falle des thermodynamischen Gleichgewichtes ν eine solche Funktion von x, daß für eine beliebige virtuelle Verrückung δx der suspendierten Substanz die Variation der freien Energie verschwindet. Man hat also:

$$\delta F = \delta E - T \delta S = 0 .$$

Es werde angenommen, daß die Flüssigkeit senkrecht zur X-Achse den Querschnitt 1 habe und durch die Ebenen $x = 0$ und $x = l$ begrenzt sei. Man hat dann:

$$\delta E = - \int_0^l K \nu \, \delta x \, d x$$

und

$$\delta S = \int_0^l R \frac{\nu}{N} \frac{\partial \, \delta x}{\partial x} d x = - \frac{R}{N} \int_0^l \frac{\partial \nu}{\partial x} \delta x \, d x .$$

Die gesuchte Gleichgewichtsbedingung ist also:

$$- K \nu + \frac{R T}{N} \frac{\partial \nu}{\partial x} = 0 \tag{1}$$

oder

$$K \nu - \frac{\partial p}{\partial x} = 0 .$$

Die letzte Gleichung sagt aus, daß der Kraft K durch osmotische Druckkräfte das Gleichgewicht geleistet wird.

Die Gleichung (1) benutzen wir, um den Diffusionskoeffizienten der suspendierten Substanz zu ermitteln. Wir können den eben betrachteten dynamischen Gleichgewichtszustand als die Superposition zweier in umgekehrtem Sinne verlaufender Prozesse auffassen, nämlich

1. einer Bewegung der suspendierten Substanz unter der Wirkung der auf jedes einzelne suspendierte Teilchen wirkenden Kraft K,

2. eines Diffusionsvorganges, welcher als Folge der ungeordneten Bewegungen der Teilchen infolge der Molekularbewegung der Wärme aufzufassen ist.

Haben die suspendierten Teilchen Kugelform (Kugelradius P) und besitzt die Flüssigkeit den Reibungskoeffizienten k, so erteilt die Kraft K dem einzelnen Teilchen die Geschwindigkeit[1])

$$\frac{K}{6\pi k P},$$

und es treten durch die Querschnittseinheit pro Zeiteinheit

$$\frac{\nu K}{6\pi k P}$$

Teilchen hindurch.

Bezeichnet ferner D den Diffusionskoeffizienten der suspendierten Substanz und μ die Masse eines Teilchens, so treten pro Zeiteinheit infolge der Diffusion

$$-D\frac{\partial(\mu\nu)}{\partial x}\ \text{Gramm}$$

oder

$$-D\frac{\partial \nu}{\partial x}$$

Teilchen durch die Querschnittseinheit. Da dynamisches Gleichgewicht herrschen soll, so muß sein:

$$\frac{\nu K}{6\pi k P} - D\frac{\partial \nu}{\partial x} = 0. \tag{2}$$

Aus den beiden für das dynamische Gleichgewicht gefundenen Bedingungen (1) und (2) kann man den Diffusionskoeffizienten berechnen. Man erhält:

$$D = \frac{RT}{N}\frac{1}{6\pi k P}.$$

Der Diffusionskoeffizient der suspendierten Substanz hängt also

1) Vgl. z. B. G. Kirchhoff, Vorlesungen über Mechanik, 26. Vorlesung § 4.

außer von universellen Konstanten und der absoluten Temperatur nur vom Reibungskoeffizienten der Flüssigkeit und von der Größe der suspendierten Teilchen ab.

§ 4. Über die ungeordnete Bewegung von in einer Flüssigkeit suspendierten Teilchen und deren Beziehung zur Diffusion.

Wir gehen nun dazu über, die ungeordneten Bewegungen genauer zu untersuchen, welche, von der Molekularbewegung der Wärme hervorgerufen, Anlaß zu der im letzten Paragraphen untersuchten Diffusion geben.

Es muß offenbar angenommen werden, daß jedes einzelne Teilchen eine Bewegung ausführe, welche unabhängig ist von der Bewegung aller anderen Teilchen; es werden auch die Bewegungen eines und desselben Teilchens in verschiedenen Zeitintervallen als voneinander unabhängige Vorgänge aufzufassen sein, solange wir diese Zeitintervalle nicht zu klein gewählt denken.

Wir führen ein Zeitintervall τ in die Betrachtung ein, welches sehr klein sei gegen die beobachtbaren Zeitintervalle, aber doch so groß, daß die in zwei aufeinanderfolgenden Zeitintervallen τ von einem Teilchen ausgeführten Bewegungen als voneinander unabhängige Ereignisse aufzufassen sind.

Seien nun in einer Flüssigkeit im ganzen n suspendierte Teilchen vorhanden. In einem Zeitintervall τ werden sich die X-Koordinaten der einzelnen Teilchen um Δ vergrößern, wobei Δ für jedes Teilchen einen anderen (positiven oder negativen) Wert hat. Es wird für Δ ein gewisses Häufigkeitsgesetz gelten; die Anzahl dn der Teilchen, welche in dem Zeitintervall τ eine Verschiebung erfahren, welche zwischen Δ und $\Delta + d\Delta$ liegt, wird durch eine Gleichung von der Form

$$dn = n\varphi(\Delta)\,d\Delta$$

ausdrückbar sein, wobei

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\Delta)\,d\Delta = 1$$

und φ nur für sehr kleine Werte von Δ von Null verschieden ist und die Bedingung

$$\varphi(\Delta) = \varphi(-\Delta)$$

erfüllt.

Wir untersuchen nun, wie der Diffusionskoeffizient von φ abhängt, wobei wir uns wieder auf den Fall beschränken, daß die Anzahl ν der Teilchen pro Volumeneinheit nur von x und t abhängt.

Es sei $\nu = f(x, t)$ die Anzahl der Teilchen pro Volumeneinheit, wir berechnen die Verteilung der Teilchen zur Zeit $t + \tau$ aus deren Verteilung zur Zeit t. Aus der Definition der Funktion $\varphi(\Delta)$ ergibt sich leicht die Anzahl der Teilchen, welche sich zur Zeit $t + \tau$ zwischen zwei zur X-Achse senkrechten Ebenen mit den Abszissen x und $x + dx$ befinden. Man erhält:

$$f(x, t + \tau)\,dx = dx \cdot \int\limits_{\Delta = -\infty}^{\Delta = +\infty} f(x + \Delta)\,\varphi(\Delta)\,d\Delta\,.$$

Nun können wir aber, da τ sehr klein ist, setzen:

$$f(x, t + \tau) = f(x, t) + \tau\,\frac{\partial f}{\partial t}\,.$$

Ferner entwickeln wir $f(x + \Delta, t)$ nach Potenzen von Δ:

$$f(x + \Delta, t) = f(x, t) + \Delta\,\frac{\partial f(x, t)}{\partial x} + \frac{\Delta^2}{2!}\,\frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2}\ \ldots \text{ in inf.}$$

Diese Entwicklung können wir unter dem Integral vornehmen, da zu letzterem nur sehr kleine Werte von Δ etwas beitragen. Wir erhalten:

$$f + \frac{\partial f}{\partial t} \cdot \tau = f \cdot \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\Delta)\,d\Delta + \frac{\partial f}{\partial x} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Delta\,\varphi(\Delta)\,d\Delta$$
$$+ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Delta^2}{2}\,\varphi(\Delta)\,d\Delta\ \ldots$$

Auf der rechten Seite verschwindet wegen $\varphi(x) = \varphi(-x)$ das zweite, vierte etc. Glied, während von dem ersten, dritten, fünften etc. Gliede jedes folgende gegen das vorhergehende sehr klein ist. Wir erhalten aus dieser Gleichung, indem wir berücksichtigen, daß

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\Delta)\,d\Delta = 1,$$

und indem wir

$$\frac{1}{\tau}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\Delta^2}{2}\varphi(\Delta)\,d\Delta = D$$

setzen und nur das erste und dritte Glied der rechten Seite berücksichtigen:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = D\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}. \tag{1}$$

Dies ist die bekannte Differentialgleichung der Diffusion, und man erkennt, daß D der Diffusionskoeffizient ist.

An diese Entwicklung läßt sich noch eine wichtige Überlegung anknüpfen. Wir haben angenommen, daß die einzelnen Teilchen alle auf dasselbe Koordinatensystem bezogen seien. Dies ist jedoch nicht nötig, da die Bewegungen der einzelnen Teilchen voneinander unabhängig sind. Wir wollen nun die Bewegung jedes Teilchens auf ein Koordinatensystem beziehen, dessen Ursprung mit der Lage des Schwerpunktes des betreffenden Teilchens zur Zeit $t = 0$ zusammenfällt, mit dem Unterschiede, daß jetzt $f(x, t)\,dx$ die Anzahl der Teilchen bedeutet, deren X-Koordinaten von der Zeit $t = 0$ bis zur Zeit $t = t$ um eine Größe *gewachsen* ist, welche zwischen x und $x + dx$ liegt. Auch in diesem Falle ändert sich also die Funktion f gemäß Gleichung (1). Ferner muß offenbar für $x \gtrless 0$ und $t = 0$

$$f(x, t) = 0 \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, t)\,dx = n$$

sein. Das Problem, welches mit dem Problem der Diffusion von einem Punkte aus (unter Vernachlässigung der Wechselwirkung der diffundierenden Teilchen) übereinstimmt, ist nun mathematisch vollkommen bestimmt; seine Lösung ist:

$$f(x, t) = \frac{n}{\sqrt{4\pi D}}\frac{e^{-\frac{x^2}{4Dt}}}{\sqrt{t}}.$$

Die Häufigkeitsverteilung der in einer beliebigen Zeit t erfolgten Lagenänderungen ist also dieselbe wie die der zufälligen Fehler, was zu vermuten war. Von Bedeutung aber ist, wie die Konstante im Exponenten mit dem Diffusionskoeffizienten zusammenhängt. Wir berechnen nun mit Hilfe dieser Gleichung die Verrückung λ_x in Richtung der X-Achse, welche ein Teilchen im Mittel erfährt, oder — genauer ausgedrückt — die Wurzel aus dem arithmetischen Mittel der Quadrate der Verrückungen in Richtung der X-Achse; es ist:

$$\lambda_x = \sqrt{\overline{x^2}} = \sqrt{2\,D\,t}\,.$$

Die mittlere Verschiebung ist also proportional der Quadratwurzel aus der Zeit. Man kann leicht zeigen, daß die Wurzel aus dem Mittelwert der Quadrate der *Gesamtverschiebungen* der Teilchen den Wert $\lambda_x \sqrt{3}$ besitzt.

§ 5. Formel für die mittlere Verschiebung suspendierter Teilchen. Eine neue Methode zur Bestimmung der wahren Größe der Atome.

In § 3 haben wir für den Diffusionskoeffizienten D eines in einer Flüssigkeit in Form von kleinen Kugeln vom Radius P suspendierten Stoffes den Wert gefunden:

$$D = \frac{R\,T}{N}\,\frac{1}{6\,\pi\,k\,P}\,.$$

Ferner fanden wir in § 4 für den Mittelwert der Verschiebungen der Teilchen in Richtung der X-Achse in der Zeit t:

$$\lambda_x = \sqrt{2\,D\,t}\,.$$

Durch Eliminieren von D erhalten wir:

$$\lambda_x = \sqrt{t}\,.\sqrt{\frac{R\,T}{N}\,\frac{1}{3\,\pi\,k\,P}}\,.$$

Diese Gleichung läßt erkennen, wie λ_x von T, k und P abhängen muß.

Wir wollen berechnen, wie groß λ_x für eine Sekunde ist, wenn N gemäß den Resultaten der kinetischen Gastheorie $6\,.\,10^{23}$ gesetzt wird; es sei als Flüssigkeit Wasser von 17° C. gewählt ($k = 1{,}35\,.\,10^{-2}$) und der Teilchendurchmesser sei 0,001 mm. Man erhält:

$$\lambda_x = 8\,.\,10^{-5}\,\mathrm{cm} = 0{,}8\ \text{Mikron}.$$

Die mittlere Verschiebung in 1 Min. wäre also ca. 6 Mikron.

37*

Umgekehrt läßt sich die gefundene Beziehung zur Bestimmung von N benutzen. Man erhält:

$$N = \frac{t}{\lambda_x^2} \cdot \frac{R\,T}{3\,\pi\,k\,P}.$$

Möge es bald einem Forscher gelingen, die hier aufgeworfene, für die Theorie der Wärme wichtige Frage zu entscheiden!

Bern, Mai 1905.

(Eingegangen 11. Mai 1905.)

***Annalen der Physik*, 1905**

On the Electrodynamics of Moving Bodies

***Annalen der Physik*, 1905**

3. *Zur Elektrodynamik bewegter Körper;*
von A. Einstein.

Daß die Elektrodynamik Maxwells — wie dieselbe gegenwärtig aufgefaßt zu werden pflegt — in ihrer Anwendung auf bewegte Körper zu Asymmetrien führt, welche den Phänomenen nicht anzuhaften scheinen, ist bekannt. Man denke z. B. an die elektrodynamische Wechselwirkung zwischen einem Magneten und einem Leiter. Das beobachtbare Phänomen hängt hier nur ab von der Relativbewegung von Leiter und Magnet, während nach der üblichen Auffassung die beiden Fälle, daß der eine oder der andere dieser Körper der bewegte sei, streng voneinander zu trennen sind. Bewegt sich nämlich der Magnet und ruht der Leiter, so entsteht in der Umgebung des Magneten ein elektrisches Feld von gewissem Energiewerte, welches an den Orten, wo sich Teile des Leiters befinden, einen Strom erzeugt. Ruht aber der Magnet und bewegt sich der Leiter, so entsteht in der Umgebung des Magneten kein elektrisches Feld, dagegen im Leiter eine elektromotorische Kraft, welcher an sich keine Energie entspricht, die aber — Gleichheit der Relativbewegung bei den beiden ins Auge gefaßten Fällen vorausgesetzt — zu elektrischen Strömen von derselben Größe und demselben Verlaufe Veranlassung gibt, wie im ersten Falle die elektrischen Kräfte.

Beispiele ähnlicher Art, sowie die mißlungenen Versuche, eine Bewegung der Erde relativ zum „Lichtmedium" zu konstatieren, führen zu der Vermutung, daß dem Begriffe der absoluten Ruhe nicht nur in der Mechanik, sondern auch in der Elektrodynamik keine Eigenschaften der Erscheinungen entsprechen, sondern daß vielmehr für alle Koordinatensysteme, für welche die mechanischen Gleichungen gelten, auch die gleichen elektrodynamischen und optischen Gesetze gelten, wie dies für die Größen erster Ordnung bereits erwiesen ist. Wir wollen diese Vermutung (deren Inhalt im folgenden „Prinzip der Relativität" genannt werden wird) zur Voraussetzung erheben und außerdem die mit ihm nur scheinbar unverträgliche

Voraussetzung einführen, daß sich das Licht im leeren Raume stets mit einer bestimmten, vom Bewegungszustande des emittierenden Körpers unabhängigen Geschwindigkeit V fortpflanze. Diese beiden Voraussetzungen genügen, um zu einer einfachen und widerspruchsfreien Elektrodynamik bewegter Körper zu gelangen unter Zugrundelegung der Maxwellschen Theorie für ruhende Körper. Die Einführung eines „Lichtäthers" wird sich insofern als überflüssig erweisen, als nach der zu entwickelnden Auffassung weder ein mit besonderen Eigenschaften ausgestatteter „absolut ruhender Raum" eingeführt, noch einem Punkte des leeren Raumes, in welchem elektromagnetische Prozesse stattfinden, ein Geschwindigkeitsvektor zugeordnet wird.

Die zu entwickelnde Theorie stützt sich — wie jede andere Elektrodynamik — auf die Kinematik des starren Körpers, da die Aussagen einer jeden Theorie Beziehungen zwischen starren Körpern (Koordinatensystemen), Uhren und elektromagnetischen Prozessen betreffen. Die nicht genügende Berücksichtigung dieses Umstandes ist die Wurzel der Schwierigkeiten, mit denen die Elektrodynamik bewegter Körper gegenwärtig zu kämpfen hat.

I. Kinematischer Teil.

§ 1. Definition der Gleichzeitigkeit.

Es liege ein Koordinatensystem vor, in welchem die Newtonschen mechanischen Gleichungen gelten. Wir nennen dies Koordinatensystem zur sprachlichen Unterscheidung von später einzuführenden Koordinatensystemen und zur Präzisierung der Vorstellung das „ruhende System".

Ruht ein materieller Punkt relativ zu diesem Koordinatensystem, so kann seine Lage relativ zu letzterem durch starre Maßstäbe unter Benutzung der Methoden der euklidischen Geometrie bestimmt und in kartesischen Koordinaten ausgedrückt werden.

Wollen wir die *Bewegung* eines materiellen Punktes beschreiben, so geben wir die Werte seiner Koordinaten in Funktion der Zeit. Es ist nun wohl im Auge zu behalten, daß eine derartige mathematische Beschreibung erst dann einen physikalischen Sinn hat, wenn man sich vorher darüber klar geworden ist, was hier unter „Zeit" verstanden wird.

Wir haben zu berücksichtigen, daß alle unsere Urteile, in welchen die Zeit eine Rolle spielt, immer Urteile über *gleichzeitige Ereignisse* sind. Wenn ich z. B. sage: „Jener Zug kommt hier um 7 Uhr an," so heißt dies etwa: „Das Zeigen des kleinen Zeigers meiner Uhr auf 7 und das Ankommen des Zuges sind gleichzeitige Ereignisse."[1])

Es könnte scheinen, daß alle die Definition der „Zeit" betreffenden Schwierigkeiten dadurch überwunden werden könnten, daß ich an Stelle der „Zeit" die „Stellung des kleinen Zeigers meiner Uhr" setze. Eine solche Definition genügt in der Tat, wenn es sich darum handelt, eine Zeit zu definieren ausschließlich für den Ort, an welchem sich die Uhr eben befindet; die Definition genügt aber nicht mehr, sobald es sich darum handelt, an verschiedenen Orten stattfindende Ereignisreihen miteinander zeitlich zu verknüpfen, oder — was auf dasselbe hinausläuft — Ereignisse zeitlich zu werten, welche in von der Uhr entfernten Orten stattfinden.

Wir könnten uns allerdings damit begnügen, die Ereignisse dadurch zeitlich zu werten, daß ein samt der Uhr im Koordinatenursprung befindlicher Beobachter jedem von einem zu wertenden Ereignis Zeugnis gebenden, durch den leeren Raum zu ihm gelangenden Lichtzeichen die entsprechende Uhrzeigerstellung zuordnet. Eine solche Zuordnung bringt aber den Übelstand mit sich, daß sie vom Standpunkte des mit der Uhr versehenen Beobachters nicht unabhängig ist, wie wir durch die Erfahrung wissen. Zu einer weit praktischeren Festsetzung gelangen wir durch folgende Betrachtung.

Befindet sich im Punkte A des Raumes eine Uhr, so kann ein in A befindlicher Beobachter die Ereignisse in der unmittelbaren Umgebung von A zeitlich werten durch Aufsuchen der mit diesen Ereignissen gleichzeitigen Uhrzeigerstellungen. Befindet sich auch im Punkte B des Raumes eine Uhr — wir wollen hinzufügen, „eine Uhr von genau derselben Beschaffenheit wie die in A befindliche" — so ist auch eine zeitliche Wertung der Ereignisse in der unmittelbaren Umgebung von

---

1) Die Ungenauigkeit, welche in dem Begriffe der Gleichzeitigkeit zweier Ereignisse an (annähernd) demselben Orte steckt und gleichfalls durch eine Abstraktion überbrückt werden muß, soll hier nicht erörtert werden.

B durch einen in B befindlichen Beobachter möglich. Es ist aber ohne weitere Festsetzung nicht möglich, ein Ereignis in A mit einem Ereignis in B zeitlich zu vergleichen; wir haben bisher nur eine „A-Zeit“ und eine „B-Zeit“, aber keine für A und B gemeinsame „Zeit“ definiert. Die letztere Zeit kann nun definiert werden, indem man *durch Definition* festsetzt, daß die „Zeit“, welche das Licht braucht, um von A nach B zu gelangen, gleich ist der „Zeit“, welche es braucht, um von B nach A zu gelangen. Es gehe nämlich ein Lichtstrahl zur „A-Zeit“ t_A von A nach B ab, werde zur „B-Zeit“ t_B in B gegen A zu reflektiert und gelange zur „A-Zeit“ t'_A nach A zurück. Die beiden Uhren laufen definitionsgemäß synchron, wenn

$$t_B - t_A = t'_A - t_B.$$

Wir nehmen an, daß diese Definition des Synchronismus in widerspruchsfreier Weise möglich sei, und zwar für beliebig viele Punkte, daß also allgemein die Beziehungen gelten:

1. Wenn die Uhr in B synchron mit der Uhr in A läuft, so läuft die Uhr in A synchron mit der Uhr in B.

2. Wenn die Uhr in A sowohl mit der Uhr in B als auch mit der Uhr in C synchron läuft, so laufen auch die Uhren in B und C synchron relativ zueinander.

Wir haben so unter Zuhilfenahme gewisser (gedachter) physikalischer Erfahrungen festgelegt, was unter synchron laufenden, an verschiedenen Orten befindlichen, ruhenden Uhren zu verstehen ist und damit offenbar eine Definition von „gleichzeitig“ und „Zeit“ gewonnen. Die „Zeit“ eines Ereignisses ist die mit dem Ereignis gleichzeitige Angabe einer am Orte des Ereignisses befindlichen, ruhenden Uhr, welche mit einer bestimmten, ruhenden Uhr, und zwar für alle Zeitbestimmungen mit der nämlichen Uhr, synchron läuft.

Wir setzen noch der Erfahrung gemäß fest, daß die Größe

$$\frac{2\,\overline{AB}}{t'_A - t_A} = V$$

eine universelle Konstante (die Lichtgeschwindigkeit im leeren Raume) sei.

Wesentlich ist, daß wir die Zeit mittels im ruhenden System ruhender Uhren definiert haben; wir nennen die eben definierte Zeit wegen dieser Zugehörigkeit zum ruhenden System „die Zeit des ruhenden Systems“.

§ 2. Über die Relativität von Längen und Zeiten.

Die folgenden Überlegungen stützen sich auf das Relativitätsprinzip und auf das Prinzip der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit, welche beiden Prinzipien wir folgendermaßen definieren.

1. Die Gesetze, nach denen sich die Zustände der physikalischen Systeme ändern, sind unabhängig davon, auf welches von zwei relativ zueinander in gleichförmiger Translationsbewegung befindlichen Koordinatensystemen diese Zustandsänderungen bezogen werden.

2. Jeder Lichtstrahl bewegt sich im „ruhenden“ Koordinatensystem mit der bestimmten Geschwindigkeit V, unabhängig davon, ob dieser Lichtstrahl von einem ruhenden oder bewegten Körper emittiert ist. Hierbei ist

$$\text{Geschwindigkeit} = \frac{\text{Lichtweg}}{\text{Zeitdauer}},$$

wobei „Zeitdauer“ im Sinne der Definition des § 1 aufzufassen ist.

Es sei ein ruhender starrer Stab gegeben; derselbe besitze, mit einem ebenfalls ruhenden Maßstabe gemessen, die Länge l. Wir denken uns nun die Stabachse in die X-Achse des ruhenden Koordinatensystems gelegt und dem Stabe hierauf eine gleichförmige Paralleltranslationsbewegung (Geschwindigkeit v) längs der X-Achse im Sinne der wachsenden x erteilt. Wir fragen nun nach der Länge des *bewegten* Stabes, welche wir uns durch folgende zwei Operationen ermittelt denken:

a) Der Beobachter bewegt sich samt dem vorher genannten Maßstabe mit dem auszumessenden Stabe und mißt direkt durch Anlegen des Maßstabes die Länge des Stabes, ebenso, wie wenn sich auszumessender Stab, Beobachter und Maßstab in Ruhe befänden.

b) Der Beobachter ermittelt mittels im ruhenden Systeme aufgestellter, gemäß § 1 synchroner, ruhender Uhren, in welchen Punkten des ruhenden Systems sich Anfang und Ende des auszumessenden Stabes zu einer bestimmten Zeit t befinden.

58*

Die Entfernung dieser beiden Punkte, gemessen mit dem schon benutzten, in diesem Falle ruhenden Maßstabe ist ebenfalls eine Länge, welche man als „Länge des Stabes" bezeichnen kann.

Nach dem Relativitätsprinzip muß die bei der Operation a) zu findende Länge, welche wir „die Länge des Stabes im bewegten System" nennen wollen, gleich der Länge l des ruhenden Stabes sein.

Die bei der Operation b) zu findende Länge, welche wir „die Länge des (bewegten) Stabes im ruhenden System" nennen wollen, werden wir unter Zugrundelegung unserer beiden Prinzipien bestimmen und finden, daß sie von l verschieden ist.

Die allgemein gebrauchte Kinematik nimmt stillschweigend an, daß die durch die beiden erwähnten Operationen bestimmten Längen einander genau gleich seien, oder mit anderen Worten, daß ein bewegter starrer Körper in der Zeitepoche t in geometrischer Beziehung vollständig durch *denselben* Körper, wenn er in bestimmter Lage *ruht*, ersetzbar sei.

Wir denken uns ferner an den beiden Stabenden (A und B) Uhren angebracht, welche mit den Uhren des ruhenden Systems synchron sind, d. h. deren Angaben jeweilen der „Zeit des ruhenden Systems" an den Orten, an welchen sie sich gerade befinden, entsprechen; diese Uhren sind also „synchron im ruhenden System".

Wir denken uns ferner, daß sich bei jeder Uhr ein mit ihr bewegter Beobachter befinde, und daß diese Beobachter auf die beiden Uhren das im § 1 aufgestellte Kriterium für den synchronen Gang zweier Uhren anwenden. Zur Zeit[1]) t_A gehe ein Lichtstrahl von A aus, werde zur Zeit t_B in B reflektiert und gelange zur Zeit t'_A nach A zurück. Unter Berücksichtigung des Prinzipes von der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit finden wir:

$$t_B - t_A = \frac{r_{AB}}{V - v}$$

1) „Zeit" bedeutet hier „Zeit des ruhenden Systems" und zugleich „Zeigerstellung der bewegten Uhr, welche sich an dem Orte, von dem die Rede ist, befindet".

und

$$t'_A - t_B = \frac{r_{AB}}{V + v},$$

wobei r_{AB} die Länge des bewegten Stabes — im ruhenden System gemessen — bedeutet. Mit dem bewegten Stabe bewegte Beobachter würden also die beiden Uhren nicht synchron gehend finden, während im ruhenden System befindliche Beobachter die Uhren als synchron laufend erklären würden.

Wir sehen also, daß wir dem Begriffe der Gleichzeitigkeit keine *absolute* Bedeutung beimessen dürfen, sondern daß zwei Ereignisse, welche, von einem Koordinatensystem aus betrachtet, gleichzeitig sind, von einem relativ zu diesem System bewegten System aus betrachtet, nicht mehr als gleichzeitige Ereignisse aufzufassen sind.

§ 3. Theorie der Koordinaten- und Zeittransformation von dem ruhenden auf ein relativ zu diesem in gleichförmiger Translationsbewegung befindliches System.

Seien im „ruhenden" Raume zwei Koordinatensysteme, d. h. zwei Systeme von je drei von einem Punkte ausgehenden, aufeinander senkrechten starren materiellen Linien, gegeben. Die X-Achsen beider Systeme mögen zusammenfallen, ihre Y- und Z-Achsen bezüglich parallel sein. Jedem Systeme sei ein starrer Maßstab und eine Anzahl Uhren beigegeben, und es seien beide Maßstäbe sowie alle Uhren beider Systeme einander genau gleich.

Es werde nun dem Anfangspunkte des einen der beiden Systeme (k) eine (konstante) Geschwindigkeit v in Richtung der wachsenden x des anderen, ruhenden Systems (K) erteilt, welche sich auch den Koordinatenachsen, dem betreffenden Maßstabe sowie den Uhren mitteilen möge. Jeder Zeit t des ruhenden Systems K entspricht dann eine bestimmte Lage der Achsen des bewegten Systems und wir sind aus Symmetriegründen befugt anzunehmen, daß die Bewegung von k so beschaffen sein kann, daß die Achsen des bewegten Systems zur Zeit t (es ist mit „t" immer eine Zeit des ruhenden Systems bezeichnet) den Achsen des ruhenden Systems parallel seien.

Wir denken uns nun den Raum sowohl vom ruhenden System K aus mittels des ruhenden Maßstabes als auch vom bewegten System k mittels des mit ihm bewegten Maßstabes ausgemessen und so die Koordinaten x, y, z bez. ξ, η, ζ ermittelt. Es werde ferner mittels der im ruhenden System befindlichen ruhenden Uhren durch Lichtsignale in der in § 1 angegebenen Weise die Zeit t des ruhenden Systems für alle Punkte des letzteren bestimmt, in denen sich Uhren befinden; ebenso werde die Zeit τ des bewegten Systems für alle Punkte des bewegten Systems, in welchen sich relativ zu letzterem ruhende Uhren befinden, bestimmt durch Anwendung der in § 1 genannten Methode der Lichtsignale zwischen den Punkten, in denen sich die letzteren Uhren befinden.

Zu jedem Wertsystem x, y, z, t, welches Ort und Zeit eines Ereignisses im ruhenden System vollkommen bestimmt, gehört ein jenes Ereignis relativ zum System k festlegendes Wertsystem ξ, η, ζ, τ, und es ist nun die Aufgabe zu lösen, das diese Größen verknüpfende Gleichungssystem zu finden.

Zunächst ist klar, daß die Gleichungen *linear* sein müssen wegen der Homogenitätseigenschaften, welche wir Raum und Zeit beilegen.

Setzen wir $x' = x - v\,t$, so ist klar, daß einem im System k ruhenden Punkte ein bestimmtes, von der Zeit unabhängiges Wertsystem x', y, z zukommt. Wir bestimmen zuerst τ als Funktion von x', y, z und t. Zu diesem Zwecke haben wir in Gleichungen auszudrücken, daß τ nichts anderes ist als der Inbegriff der Angaben von im System k ruhenden Uhren, welche nach der im § 1 gegebenen Regel synchron gemacht worden sind.

Vom Anfangspunkt des Systems k aus werde ein Lichtstrahl zur Zeit τ_0 längs der X-Achse nach x' gesandt und von dort zur Zeit τ_1 nach dem Koordinatenursprung reflektiert, wo er zur Zeit τ_2 anlange; so muß dann sein:

$$\tfrac{1}{2}(\tau_0 + \tau_2) = \tau_1$$

oder, indem man die Argumente der Funktion τ beifügt und das Prinzip der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit im ruhenden Systeme anwendet:

$$\tfrac{1}{2}\left[\tau\,(0, 0, 0, t) + \tau\left(0, 0, 0, \left\{t + \frac{x'}{V-v} + \frac{x'}{V+v}\right\}\right)\right]$$
$$= \tau\left(x', 0, 0, t + \frac{x'}{V-v}\right).$$

Hieraus folgt, wenn man x' unendlich klein wählt:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{V-v}+\frac{1}{V+v}\right)\frac{\partial \tau}{\partial t}=\frac{\partial \tau}{\partial x'}+\frac{1}{V-v}\frac{\partial \tau}{\partial t},$$

oder

$$\frac{\partial \tau}{\partial x'}+\frac{v}{V^2-v^2}\frac{\partial \tau}{\partial t}=0.$$

Es ist zu bemerken, daß wir statt des Koordinatenursprunges jeden anderen Punkt als Ausgangspunkt des Lichtstrahles hätten wählen können und es gilt deshalb die eben erhaltene Gleichung für alle Werte von x', y, z.

Eine analoge Überlegung — auf die H- und Z-Achse angewandt — liefert, wenn man beachtet, daß sich das Licht längs dieser Achsen vom ruhenden System aus betrachtet stets mit der Geschwindigkeit $\sqrt{V^2-v^2}$ fortpflanzt:

$$\frac{\partial \tau}{\partial y}=0$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial z}=0.$$

Aus diesen Gleichungen folgt, da τ eine *lineare* Funktion ist:

$$\tau=a\left(t-\frac{v}{V^2-v^2}x'\right),$$

wobei a eine vorläufig unbekannte Funktion $\varphi(v)$ ist und der Kürze halber angenommen ist, daß im Anfangspunkte von k für $\tau=0$ $t=0$ sei.

Mit Hilfe dieses Resultates ist es leicht, die Größen ξ, η, ζ zu ermitteln, indem man durch Gleichungen ausdrückt, daß sich das Licht (wie das Prinzip der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit in Verbindung mit dem Relativitätsprinzip verlangt) auch im bewegten System gemessen mit der Geschwindigkeit V fortpflanzt. Für einen zur Zeit $\tau=0$ in Richtung der wachsenden ξ ausgesandten Lichtstrahl gilt:

$$\xi=V\tau,$$

oder

$$\xi=aV\left(t-\frac{v}{V^2-v^2}x'\right).$$

Nun bewegt sich aber der Lichtstrahl relativ zum Anfangspunkt von k im ruhenden System gemessen mit der Geschwindigkeit $V - v$, so daß gilt:

$$\frac{x'}{V-v} = t.$$

Setzen wir diesen Wert von t in die Gleichung für ξ ein, so erhalten wir:

$$\xi = a \frac{V^2}{V^2 - v^2} x'.$$

Auf analoge Weise finden wir durch Betrachtung von längs den beiden anderen Achsen bewegte Lichtstrahlen:

$$\eta = V\tau = a V \left(t - \frac{v}{V^2 - v^2} x' \right),$$

wobei

$$\frac{y}{\sqrt{V^2 - v^2}} = t; \quad x' = 0;$$

also

$$\eta = a \frac{V}{\sqrt{V^2 - v^2}} y$$

und

$$\zeta = a \frac{V}{\sqrt{V^2 - v^2}} z.$$

Setzen wir für x' seinen Wert ein, so erhalten wir:

$$\tau = \varphi(v) \beta \left(t - \frac{v}{V^2} x \right),$$
$$\xi = \varphi(v) \beta (x - v t),$$
$$\eta = \varphi(v) y,$$
$$\zeta = \varphi(v) z,$$

wobei

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}}$$

und φ eine vorläufig unbekannte Funktion von v ist. Macht man über die Anfangslage des bewegten Systems und über den Nullpunkt von τ keinerlei Voraussetzung, so ist auf den rechten Seiten dieser Gleichungen je eine additive Konstante zuzufügen.

Wir haben nun zu beweisen, daß jeder Lichtstrahl sich, im bewegten System gemessen, mit der Geschwindigkeit V fortpflanzt, falls dies, wie wir angenommen haben, im ruhenden

System der Fall ist; denn wir haben den Beweis dafür noch nicht geliefert, daß das Prinzip der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit mit dem Relativitätsprinzip vereinbar sei.

Zur Zeit $t = \tau = 0$ werde von dem zu dieser Zeit gemeinsamen Koordinatenursprung beider Systeme aus eine Kugelwelle ausgesandt, welche sich im System K mit der Geschwindigkeit V ausbreitet. Ist (x, y, z) ein eben von dieser Welle ergriffener Punkt, so ist also

$$x^2 + y^2 + z^2 = V^2 t^2.$$

Diese Gleichung transformieren wir mit Hilfe unserer Transformationsgleichungen und erhalten nach einfacher Rechnung:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = V^2 \tau^2.$$

Die betrachtete Welle ist also auch im bewegten System betrachtet eine Kugelwelle von der Ausbreitungsgeschwindigkeit V. Hiermit ist gezeigt, daß unsere beiden Grundprinzipien miteinander vereinbar sind.

In den entwickelten Transformationsgleichungen tritt noch eine unbekannte Funktion φ von v auf, welche wir nun bestimmen wollen.

Wir führen zu diesem Zwecke noch ein drittes Koordinatensystem K' ein, welches relativ zum System k derart in Paralleltranslationsbewegung parallel zur Ξ-Achse begriffen sei, daß sich dessen Koordinatenursprung mit der Geschwindigkeit $-v$ auf der Ξ-Achse bewege. Zur Zeit $t = 0$ mögen alle drei Koordinatenanfangspunkte zusammenfallen und es sei für $t = x = y = z = 0$ die Zeit t' des Systems K' gleich Null. Wir nennen x', y', z' die Koordinaten, im System K' gemessen, und erhalten durch zweimalige Anwendung unserer Transformationsgleichungen:

$$\begin{aligned}
t' &= \varphi(-v)\beta(-v)\left\{\tau + \frac{v}{V^2}\xi\right\} &&= \varphi(v)\varphi(-v)t,\\
x' &= \varphi(-v)\beta(-v)\{\xi + v\tau\} &&= \varphi(v)\varphi(-v)x,\\
y' &= \varphi(-v)\eta &&= \varphi(v)\varphi(-v)y,\\
z' &= \varphi(-v)\zeta &&= \varphi(v)\varphi(-v)z.
\end{aligned}$$

Da die Beziehungen zwischen x', y', z' und x, y, z die Zeit t nicht enthalten, so ruhen die Systeme K und K' gegeneinander, und es ist klar, daß die Transformation von K auf K' die identische Transformation sein muß. Es ist also:

$$\varphi(v)\varphi(-v) = 1.$$

Wir fragen nun nach der Bedeutung von $\varphi(v)$. Wir fassen das Stück der H-Achse des Systems k ins Auge, das zwischen $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$ und $\xi = 0$, $\eta = l$, $\zeta = 0$ gelegen ist. Dieses Stück der H-Achse ist ein relativ zum System K mit der Geschwindigkeit v senkrecht zu seiner Achse bewegter Stab, dessen Enden in K die Koordinaten besitzen:

$$x_1 = v\,t, \quad y_1 = \frac{l}{\varphi(v)}, \quad z_1 = 0$$

und

$$x_2 = v\,t, \quad y_2 = 0, \quad z_2 = 0.$$

Die Länge des Stabes, in K gemessen, ist also $l/\varphi(v)$; damit ist die Bedeutung der Funktion φ gegeben. Aus Symmetriegründen ist nun einleuchtend, daß die im ruhenden System gemessene Länge eines bestimmten Stabes, welcher senkrecht zu seiner Achse bewegt ist, nur von der Geschwindigkeit, nicht aber von der Richtung und dem Sinne der Bewegung abhängig sein kann. Es ändert sich also die im ruhenden System gemessene Länge des bewegten Stabes nicht, wenn v mit $-v$ vertauscht wird. Hieraus folgt:

$$\frac{l}{\varphi(v)} = \frac{l}{\varphi(-v)},$$

oder

$$\varphi(v) = \varphi(-v).$$

Aus dieser und der vorhin gefundenen Relation folgt, daß $\varphi(v) = 1$ sein muß, so daß die gefundenen Transformationsgleichungen übergehen in:

$$\tau = \beta\left(t - \frac{v}{V^2}x\right),$$
$$\xi = \beta(x - v\,t),$$
$$\eta = y,$$
$$\zeta = z,$$

wobei

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}},$$

§ 4. Physikalische Bedeutung der erhaltenen Gleichungen, bewegte starre Körper und bewegte Uhren betreffend.

Wir betrachten eine starre Kugel[1]) vom Radius R, welche relativ zum bewegten System k ruht, und deren Mittelpunkt im Koordinatenursprung von k liegt. Die Gleichung der Oberfläche dieser relativ zum System K mit der Geschwindigkeit v bewegten Kugel ist:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = R^2 .$$

Die Gleichung dieser Oberfläche ist in x, y, z ausgedrückt zur Zeit $t = 0$:

$$\frac{x^2}{\left(\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}\right)^2} + y^2 + z^2 = R^2 .$$

Ein starrer Körper, welcher in ruhendem Zustande ausgemessen die Gestalt einer Kugel hat, hat also in bewegtem Zustande — vom ruhenden System aus betrachtet — die Gestalt eines Rotationsellipsoides mit den Achsen

$$R\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2},\ R,\ R .$$

Während also die Y- und Z-Dimension der Kugel (also auch jedes starren Körpers von beliebiger Gestalt) durch die Bewegung nicht modifiziert erscheinen, erscheint die X-Dimension im Verhältnis $1 : \sqrt{1-(v/V)^2}$ verkürzt, also um so stärker, je größer v ist. Für $v = V$ schrumpfen alle bewegten Objekte — vom „ruhenden“ System aus betrachtet — in flächenhafte Gebilde zusammen. Für Überlichtgeschwindigkeiten werden unsere Überlegungen sinnlos; wir werden übrigens in den folgenden Betrachtungen finden, daß die Lichtgeschwindigkeit in unserer Theorie physikalisch die Rolle der unendlich großen Geschwindigkeiten spielt.

Es ist klar, daß die gleichen Resultate von im „ruhenden“ System ruhenden Körpern gelten, welche von einem gleichförmig bewegten System aus betrachtet werden. —

Wir denken uns ferner eine der Uhren, welche relativ zum ruhenden System ruhend die Zeit t, relativ zum bewegten

---

1) Das heißt einen Körper, welcher ruhend untersucht Kugelgestalt besitzt.

System ruhend die Zeit τ anzugeben befähigt sind, im Koordinatenursprung von k gelegen und so gerichtet, daß sie die Zeit τ angibt. Wie schnell geht diese Uhr, vom ruhenden System aus betrachtet?

Zwischen die Größen x, t und τ, welche sich auf den Ort dieser Uhr beziehen, gelten offenbar die Gleichungen:

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}}\left(t - \frac{v}{V^2}x\right)$$

und

$$x = v\,t.$$

Es ist also

$$\tau = t\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2} = t - \left(1-\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}\right)t,$$

woraus folgt, daß die Angabe der Uhr (im ruhenden System betrachtet) pro Sekunde um $\left(1-\sqrt{1-(v/V)^2}\right)$ Sek. oder — bis auf Größen vierter und höherer Ordnung um $\frac{1}{2}(v/V)^2$ Sek. zurückbleibt.

Hieraus ergibt sich folgende eigentümliche Konsequenz. Sind in den Punkten A und B von K ruhende, im ruhenden System betrachtet, synchron gehende Uhren vorhanden, und bewegt man die Uhr in A mit der Geschwindigkeit v auf der Verbindungslinie nach B, so gehen nach Ankunft dieser Uhr in B die beiden Uhren nicht mehr synchron, sondern die von A nach B bewegte Uhr geht gegenüber der von Anfang an in B befindlichen um $\frac{1}{2}t v^2/V^2$ Sek. (bis auf Größen vierter und höherer Ordnung) nach, wenn t die Zeit ist, welche die Uhr von A nach B braucht.

Man sieht sofort, daß dies Resultat auch dann noch gilt, wenn die Uhr in einer beliebigen polygonalen Linie sich von A nach B bewegt, und zwar auch dann, wenn die Punkte A und B zusammenfallen.

Nimmt man an, daß das für eine polygonale Linie bewiesene Resultat auch für eine stetig gekrümmte Kurve gelte, so erhält man den Satz: Befinden sich in A zwei synchron gehende Uhren und bewegt man die eine derselben auf einer geschlossenen Kurve mit konstanter Geschwindigkeit, bis sie wieder nach A zurückkommt, was t Sek. dauern möge, so geht die letztere Uhr bei ihrer Ankunft in A gegenüber der unbewegt gebliebenen um $\frac{1}{2}\,t\,(v/V)^2$ Sek. nach. Man schließt daraus, daß eine am Erdäquator befindliche Unruhuhr um einen sehr kleinen Betrag langsamer laufen muß als eine genau gleich beschaffene, sonst gleichen Bedingungen unterworfene, an einem Erdpole befindliche Uhr.

§ 5. Additionstheorem der Geschwindigkeiten.

In dem längs der X-Achse des Systems K mit der Geschwindigkeit v bewegten System k bewege sich ein Punkt gemäß den Gleichungen:

$$\xi = w_\xi\,\tau\,,$$

$$\eta = w_\eta\,\tau\,,$$

$$\zeta = 0\,,$$

wobei w_ξ und w_η Konstanten bedeuten.

Gesucht ist die Bewegung des Punktes relativ zum System K. Führt man in die Bewegungsgleichungen des Punktes mit Hilfe der in § 3 entwickelten Transformationsgleichungen die Größen x, y, z, t ein, so erhält man:

$$x = \frac{w_\xi + v}{1 + \frac{v\,w_\xi}{V^2}}\,t\,,$$

$$y = \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}}{1 + \frac{v\,w_\xi}{V^2}}\,w_\eta\,t\,,$$

$$z = 0\,.$$

Das Gesetz vom Parallelogramm der Geschwindigkeiten gilt also nach unserer Theorie nur in erster Annäherung. Wir setzen:

$$U^2 = \left(\frac{d\,x}{d\,t}\right)^2 + \left(\frac{d\,y}{d\,t}\right)^2,$$

$$w^2 = w_\xi^2 + w_\eta^2$$

und

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{w_y}{w_x}\,;$$

α ist dann als der Winkel zwischen den Geschwindigkeiten v und w anzusehen. Nach einfacher Rechnung ergibt sich:

$$U = \frac{\sqrt{(v^2 + w^2 + 2\,v\,w\cos\alpha) - \left(\frac{v\,w\sin\alpha}{V}\right)^2}}{1 + \frac{v\,w\cos\alpha}{V^2}}.$$

Es ist bemerkenswert, daß v und w in symmetrischer Weise in den Ausdruck für die resultierende Geschwindigkeit eingehen. Hat auch w die Richtung der X-Achse (Ξ-Achse), so erhalten wir:

$$U = \frac{v + w}{1 + \frac{v\,w}{V^2}}.$$

Aus dieser Gleichung folgt, daß aus der Zusammensetzung zweier Geschwindigkeiten, welche kleiner sind als V, stets eine Geschwindigkeit kleiner als V resultiert. Setzt man nämlich $v = V - \varkappa$, $w = V - \lambda$, wobei $\varkappa$ und λ positiv und kleiner als V seien, so ist:

$$U = V\frac{2\,V - \varkappa - \lambda}{2\,V - \varkappa - \lambda + \frac{\varkappa\,\lambda}{V}} < V.$$

Es folgt ferner, daß die Lichtgeschwindigkeit V durch Zusammensetzung mit einer „Unterlichtgeschwindigkeit“ nicht geändert werden kann. Man erhält für diesen Fall:

$$U = \frac{V + w}{1 + \frac{w}{V}} = V.$$

Wir hätten die Formel für U für den Fall, daß v und w gleiche Richtung besitzen, auch durch Zusammensetzen zweier Transformationen gemäß § 3 erhalten können. Führen wir neben den in § 3 figurierenden Systemen K und k noch ein drittes, zu k in Parallelbewegung begriffenes Koordinatensystem k' ein, dessen Anfangspunkt sich auf der Ξ-Achse mit der Geschwindigkeit w bewegt, so erhalten wir zwischen den Größen x, y, z, t und den entsprechenden Größen von k' Gleichungen, welche sich von den in § 3 gefundenen nur dadurch unterscheiden, daß an Stelle von „v“ die Größe

$$\frac{v + w}{1 + \frac{v\,w}{V^2}}$$

tritt; man sieht daraus, daß solche Paralleltransformationen — wie dies sein muß — eine Gruppe bilden.

Wir haben nun die für uns notwendigen Sätze der unseren zwei Prinzipien entsprechenden Kinematik hergeleitet und gehen dazu über, deren Anwendung in der Elektrodynamik zu zeigen.

II. Eektrodynamischer Teil.

§ 6. Transformation der Maxwell-Hertzschen Gleichungen für den leeren Raum. Über die Natur der bei Bewegung in einem Magnetfeld auftretenden elektromotorischen Kräfte.

Die Maxwell-Hertzschen Gleichungen für den leeren Raum mögen gültig sein für das ruhende System K, so daß gelten möge:

$$\frac{1}{V}\frac{\partial X}{\partial t} = \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}, \quad \frac{1}{V}\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y},$$

$$\frac{1}{V}\frac{\partial Y}{\partial t} = \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x}, \quad \frac{1}{V}\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z},$$

$$\frac{1}{V}\frac{\partial Z}{\partial t} = \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}, \quad \frac{1}{V}\frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x},$$

wobei (X, Y, Z) den Vektor der elektrischen, (L, M, N) den der magnetischen Kraft bedeutet.

Wenden wir auf diese Gleichungen die in § 3 entwickelte Transformation an, indem wir die elektromagnetischen Vorgänge auf das dort eingeführte, mit der Geschwindigkeit v bewegte Koordinatensystem beziehen, so erhalten wir die Gleichungen:

$$\frac{1}{V}\frac{\partial X}{\partial \tau} = \frac{\partial \beta\left(N - \frac{v}{V}Y\right)}{\partial \eta} - \frac{\partial \beta\left(M + \frac{v}{V}Z\right)}{\partial \zeta},$$

$$\frac{1}{V}\frac{\partial \beta\left(Y - \frac{v}{V}N\right)}{\partial \tau} = \frac{\partial L}{\partial \zeta} - \frac{\partial \beta\left(N - \frac{v}{V}Y\right)}{\partial \xi},$$

$$\frac{1}{V}\frac{\partial \beta\left(Z + \frac{v}{V}M\right)}{\partial \tau} = \frac{\partial \beta\left(M + \frac{v}{V}Z\right)}{\partial \xi} - \frac{\partial L}{\partial \eta},$$

$$\frac{1}{V}\frac{\partial L}{\partial \tau} = \frac{\partial \beta\left(Y - \frac{v}{V}N\right)}{\partial \zeta} - \frac{\partial \beta\left(Z + \frac{v}{V}M\right)}{\partial \eta},$$

$$\frac{1}{V}\frac{\partial \beta\left(M + \frac{v}{V} Z\right)}{\partial \tau} = \frac{\partial \beta\left(Z + \frac{v}{V} M\right)}{\partial \xi} - \frac{\partial X}{\partial \zeta},$$

$$\frac{1}{V}\frac{\partial \beta\left(N - \frac{v}{V} Y\right)}{\partial \tau} = \frac{\partial X}{\partial \eta} - \frac{\partial \beta\left(Y - \frac{v}{V} N\right)}{\partial \xi},$$

wobei

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}}.$$

Das Relativitätsprinzip fordert nun, daß die Maxwell-Hertzschen Gleichungen für den leeren Raum auch im System k gelten, wenn sie im System K gelten, d. h. daß für die im bewegten System k durch ihre ponderomotorischen Wirkungen auf elektrische bez. magnetische Massen definierten Vektoren der elektrischen und magnetischen Kraft $((X', Y' Z')$ und $(L', M', N'))$ des bewegten Systems k die Gleichungen gelten:

$$\frac{1}{V}\frac{\partial X'}{\partial \tau} = \frac{\partial N'}{\partial \eta} - \frac{\partial M'}{\partial \zeta}, \quad \frac{1}{V}\frac{\partial L'}{\partial \tau} = \frac{\partial Y'}{\partial \zeta} - \frac{\partial Z'}{\partial \eta},$$

$$\frac{1}{V}\frac{\partial Y'}{\partial \tau} = \frac{\partial L'}{\partial \zeta} - \frac{\partial N'}{\partial \xi}, \quad \frac{1}{V}\frac{\partial M'}{\partial \tau} = \frac{\partial Z'}{\partial \xi} - \frac{\partial X'}{\partial \zeta},$$

$$\frac{1}{V}\frac{\partial Z'}{\partial \tau} = \frac{\partial M'}{\partial \xi} - \frac{\partial L'}{\partial \eta}, \quad \frac{1}{V}\frac{\partial N'}{\partial \tau} = \frac{\partial X'}{\partial \eta} - \frac{\partial Y'}{\partial \xi}.$$

Offenbar müssen nun die beiden für das System k gefundenen Gleichungssysteme genau dasselbe ausdrücken, da beide Gleichungssysteme den Maxwell-Hertzschen Gleichungen für das System K äquivalent sind. Da die Gleichungen beider Systeme ferner bis auf die die Vektoren darstellenden Symbole übereinstimmen, so folgt, daß die in den Gleichungssystemen an entsprechenden Stellen auftretenden Funktionen bis auf einen für alle Funktionen des einen Gleichungssystems gemeinsamen, von ξ, η, ζ und τ unabhängigen, eventuell von v abhängigen Faktor $\psi(v)$ übereinstimmen müssen. Es gelten also die Beziehungen:

$$X' = \psi(v) X, \qquad L' = \psi(v) L,$$

$$Y' = \psi(v)\beta\left(Y - \frac{v}{V} N\right), \qquad M' = \psi(v)\beta\left(M + \frac{v}{V} Z\right),$$

$$Z' = \psi(v)\beta\left(Z + \frac{v}{V} M\right), \qquad N' = \psi(v)\beta\left(N - \frac{v}{V} Y\right).$$

Bildet man nun die Umkehrung dieses Gleichungssystems, erstens durch Auflösen der soeben erhaltenen Gleichungen, zweitens durch Anwendung der Gleichungen auf die inverse Transformation (von k auf K), welche durch die Geschwindigkeit $-v$ charakterisiert ist, so folgt, indem man berücksichtigt, daß die beiden so erhaltenen Gleichungssysteme identisch sein müssen:

$$\varphi(v) \cdot \varphi(-v) = 1 .$$

Ferner folgt aus Symmetriegründen [1])

$$\varphi(v) = \varphi(-v);$$

es ist also

$$\varphi(v) = 1 ,$$

und unsere Gleichungen nehmen die Form an:

$$\begin{aligned} X' &= X, & L' &= L, \\ Y' &= \beta\left(Y - \frac{v}{V} N\right), & M' &= \beta\left(M + \frac{v}{V} Z\right), \\ Z' &= \beta\left(Z + \frac{v}{V} M\right), & N' &= \beta\left(N - \frac{v}{V} Y\right). \end{aligned}$$

Zur Interpretation dieser Gleichungen bemerken wir folgendes. Es liegt eine punktförmige Elektrizitätsmenge vor, welche im ruhenden System K gemessen von der Größe „eins" sei, d. h. im ruhenden System ruhend auf eine gleiche Elektrizitätsmenge im Abstand 1 cm die Kraft 1 Dyn ausübe. Nach dem Relativitätsprinzip ist diese elektrische Masse auch im bewegten System gemessen von der Größe „eins". Ruht diese Elektrizitätsmenge relativ zum ruhenden System, so ist definitionsgemäß der Vektor (X, Y, Z) gleich der auf sie wirkenden Kraft. Ruht die Elektrizitätsmenge gegenüber dem bewegten System (wenigstens in dem betreffenden Augenblick), so ist die auf sie wirkende, in dem bewegten System gemessene Kraft gleich dem Vektor (X', Y', Z'). Die ersten drei der obigen Gleichungen lassen sich mithin auf folgende zwei Weisen in Worte kleiden:

1. Ist ein punktförmiger elektrischer Einheitspol in einem elektromagnetischen Felde bewegt, so wirkt auf ihn außer der

1) Ist z. B. $X = Y = Z = L = M = 0$ und $N \neq 0$, so ist aus Symmetriegründen klar, daß bei Zeichenwechsel von v ohne Änderung des numerischen Wertes auch Y' sein Vorzeichen ändern muß, ohne seinen numerischen Wert zu ändern.

elektrischen Kraft eine „elektromotorische Kraft", welche unter Vernachlässigung von mit der zweiten und höheren Potenzen von v/V multiplizierten Gliedern gleich ist dem mit der Lichtgeschwindigkeit dividierten Vektorprodukt der Bewegungsgeschwindigkeit des Einheitspoles und der magnetischen Kraft. (Alte Ausdrucksweise.)

2. Ist ein punktförmiger elektrischer Einheitspol in einem elektromagnetischen Felde bewegt, so ist die auf ihn wirkende Kraft gleich der an dem Orte des Einheitspoles vorhandenen elektrischen Kraft, welche man durch Transformation des Feldes auf ein relativ zum elektrischen Einheitspol ruhendes Koordinatensystem erhält. (Neue Ausdrucksweise.)

Analoges gilt über die „magnetomotorischen Kräfte". Man sieht, daß in der entwickelten Theorie die elektromotorische Kraft nur die Rolle eines Hilfsbegriffes spielt, welcher seine Einführung dem Umstande verdankt, daß die elektrischen und magnetischen Kräfte keine von dem Bewegungszustande des Koordinatensystems unabhängige Existenz besitzen.

Es ist ferner klar, daß die in der Einleitung angeführte Asymmetrie bei der Betrachtung der durch Relativbewegung eines Magneten und eines Leiters erzeugten Ströme verschwindet. Auch werden die Fragen nach dem „Sitz" der elektrodynamischen elektromotorischen Kräfte (Unipolarmaschinen) gegenstandslos.

§ 7. Theorie des Doppelerschen Prinzips und der Aberration.

Im Systeme K befinde sich sehr ferne vom Koordinatenursprung eine Quelle elektrodynamischer Wellen, welche in einem den Koordinatenursprung enthaltenden Raumteil mit genügender Annäherung durch die Gleichungen dargestellt sei:

$$\begin{aligned} X &= X_0 \sin \Phi, & L &= L_0 \sin \Phi, & & \\ Y &= Y_0 \sin \Phi, & M &= M_0 \sin \Phi, & \Phi &= \omega\left(t - \frac{a x + b y + c z}{V}\right). \\ Z &= Z_0 \sin \Phi, & N &= N_0 \sin \Phi, & & \end{aligned}$$

Hierbei sind (X_0, Y_0, Z_0) und (L_0, M_0, N_0) die Vektoren, welche die Amplitude des Wellenzuges bestimmen, a, b, c die Richtungskosinus der Wellennormalen.

Wir fragen nach der Beschaffenheit dieser Wellen, wenn dieselben von einem in dem bewegten System k ruhenden

Beobachter untersucht werden. — Durch Anwendung der in § 6 gefundenen Transformationsgleichungen für die elektrischen und magnetischen Kräfte und der in § 3 gefundenen Transformationsgleichungen für die Koordinaten und die Zeit erhalten wir unmittelbar:

$$X' = X_0 \sin \Phi', \qquad L' = L_0 \sin \Phi',$$

$$Y' = \beta \left(Y_0 - \frac{v}{V} N_0\right) \sin \Phi', \qquad M' = \beta \left(M_0 + \frac{v}{V} Z_0\right) \sin \Phi',$$

$$Z' = \beta \left(Z_0 + \frac{v}{V} M_0\right) \sin \Phi', \qquad N' = \beta \left(N_0 - \frac{v}{V} Y_0\right) \sin \Phi',$$

$$\Phi' = \omega' \left(\tau - \frac{a' \xi + b' \eta + c' \zeta}{V}\right),$$

wobei

$$\omega' = \omega \beta \left(1 - a \frac{v}{V}\right),$$

$$a' = \frac{a - \frac{v}{V}}{1 - a \frac{v}{V}},$$

$$b' = \frac{b}{\beta \left(1 - a \frac{v}{V}\right)},$$

$$c' = \frac{c}{\beta \left(1 - a \frac{v}{V}\right)}$$

gesetzt ist.

Aus der Gleichung für ω' folgt: Ist ein Beobachter relativ zu einer unendlich fernen Lichtquelle von der Frequenz ν mit der Geschwindigkeit v derart bewegt, daß die Verbindungslinie „Lichtquelle–Beobachter" mit der auf ein relativ zur Lichtquelle ruhendes Koordinatensystem bezogenen Geschwindigkeit des Beobachters den Winkel φ bildet, so ist die von dem Beobachter wahrgenommene Frequenz ν' des Lichtes durch die Gleichung gegeben:

$$\nu' = \nu \frac{1 - \cos \varphi \frac{v}{V}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}}.$$

Dies ist das Doppelersche Prinzip für beliebige Geschwindig-

59*

keiten. Für $\varphi = 0$ nimmt die Gleichung die übersichtliche Form an:

$$\nu' = \nu \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{V}}{1 + \frac{v}{V}}}.$$

Man sieht, daß — im Gegensatz zu der üblichen Auffassung — für $v = -\infty$, $\nu = \infty$ ist.

Nennt man φ' den Winkel zwischen Wellennormale (Strahlrichtung) im bewegten System und der Verbindungslinie „Lichtquelle–Beobachter", so nimmt die Gleichung für a' die Form an:

$$\cos \varphi' = \frac{\cos \varphi - \frac{v}{V}}{1 - \frac{v}{V} \cos \varphi}.$$

Diese Gleichung drückt das Aberrationsgesetz in seiner allgemeinsten Form aus. Ist $\varphi = \pi/2$, so nimmt die Gleichung die einfache Gestalt an:

$$\cos \varphi' = -\frac{v}{V}.$$

Wir haben nun noch die Amplitude der Wellen, wie dieselbe im bewegten System erscheint, zu suchen. Nennt man A bez. A' die Amplitude der elektrischen oder magnetischen Kraft im ruhenden bez. im bewegten System gemessen, so erhält man:

$$A'^2 = A^2 \frac{\left(1 - \frac{v}{V} \cos \varphi\right)^2}{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2},$$

welche Gleichung für $\varphi = 0$ in die einfachere übergeht:

$$A'^2 = A^2 \frac{1 - \frac{v}{V}}{1 + \frac{v}{V}}.$$

Es folgt aus den entwickelten Gleichungen, daß für einen Beobachter, der sich mit der Geschwindigkeit V einer Lichtquelle näherte, diese Lichtquelle unendlich intensiv erscheinen müßte.

§ 8. Transformation der Energie der Lichtstrahlen. Theorie des auf vollkommene Spiegel ausgeübten Strahlungsdruckes.

Da $A^2/8\pi$ gleich der Lichtenergie pro Volumeneinheit ist, so haben wir nach dem Relativitätsprinzip $A'^2/8\pi$ als die Lichtenergie im bewegten System zu betrachten. Es wäre daher A'^2/A^2 das Verhältnis der „bewegt gemessenen" und „ruhend gemessenen" Energie eines bestimmten Lichtkomplexes, wenn das Volumen eines Lichtkomplexes in K gemessen und in k gemessen das gleiche wäre. Dies ist jedoch nicht der Fall. Sind a, b, c die Richtungskosinus der Wellennormalen des Lichtes im ruhenden System, so wandert durch die Oberflächenelemente der mit Lichtgeschwindigkeit bewegten Kugelfläche

$$(x - V a t)^2 + (y - V b t)^2 + (z - V c t)^2 = R^2$$

keine Energie hindurch; wir können daher sagen, daß diese Fläche dauernd denselben Lichtkomplex umschließt. Wir fragen nach der Energiemenge, welche diese Fläche im System k betrachtet umschließt, d. h. nach der Energie des Lichtkomplexes relativ zum System k.

Die Kugelfläche ist — im bewegten System betrachtet — eine Ellipsoidfläche, welche zur Zeit $\tau = 0$ die Gleichung besitzt:

$$\left(\beta \xi - a \beta \frac{v}{V} \xi\right)^2 + \left(\eta - b \beta \frac{v}{V} \xi\right)^2 + \left(\zeta - c \beta \frac{v}{V} \xi\right)^2 = R^2.$$

Nennt man S das Volumen der Kugel, S' dasjenige dieses Ellipsoides, so ist, wie eine einfache Rechnung zeigt:

$$\frac{S'}{S} = \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}}{1 - \frac{v}{V} \cos \varphi}.$$

Nennt man also E die im ruhenden System gemessene, E' die im bewegten System gemessene Lichtenergie, welche von der betrachteten Fläche umschlossen wird, so erhält man:

$$\frac{E'}{E} = \frac{\frac{A'^2}{8\pi} S'}{\frac{A^2}{8\pi} S} = \frac{1 - \frac{v}{V} \cos \varphi}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}},$$

welche Formel für $\varphi = 0$ in die einfachere übergeht:

$$\frac{E'}{E} = \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{V}}{1 + \frac{v}{V}}}.$$

Es ist bemerkenswert, daß die Energie und die Frequenz eines Lichtkomplexes sich nach demselben Gesetze mit dem Bewegungszustande des Beobachters ändern.

Es sei nun die Koordinatenebene $\xi = 0$ eine vollkommen spiegelnde Fläche, an welcher die im letzten Paragraph betrachteten ebenen Wellen reflektiert werden. Wir fragen nach dem auf die spiegelnde Fläche ausgeübten Lichtdruck und nach der Richtung, Frequenz und Intensität des Lichtes nach der Reflexion.

Das einfallende Licht sei durch die Größen A, $\cos\varphi$, ν (auf das System K bezogen) definiert. Von k aus betrachtet sind die entsprechenden Größen:

$$A' = A \frac{1 - \frac{v}{V}\cos\varphi}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}},$$

$$\cos\varphi' = \frac{\cos\varphi - \frac{v}{V}}{1 - \frac{v}{V}\cos\varphi},$$

$$\nu' = \nu \frac{1 - \frac{v}{V}\cos\varphi}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}}.$$

Für das reflektierte Licht erhalten wir, wenn wir den Vorgang auf das System k beziehen:

$$A'' = A',$$

$$\cos\varphi'' = -\cos\varphi',$$

$$\nu'' = \nu'.$$

Endlich erhält man durch Rücktransformieren aufs ruhende System K für das reflektierte Licht:

$$A''' = A'' \frac{1 + \frac{v}{V} \cos \varphi''}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}} = A \frac{1 - 2\frac{v}{V} \cos \varphi + \left(\frac{v}{V}\right)^2}{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2},$$

$$\cos \varphi''' = \frac{\cos \varphi'' + \frac{v}{V}}{1 + \frac{v}{V} \cos \varphi''} = - \frac{\left(1 + \left(\frac{v}{V}\right)^2\right) \cos \varphi - 2\frac{v}{V}}{1 - 2\frac{v}{V} \cos \varphi + \left(\frac{v}{V}\right)^2},$$

$$v''' = v'' \frac{1 + \frac{v}{V} \cos \varphi''}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}} = v \frac{1 - 2\frac{v}{V} \cos \varphi + \left(\frac{v}{V}\right)^2}{\left(1 - \frac{v}{V}\right)^2}.$$

Die auf die Flächeneinheit des Spiegels pro Zeiteinheit auftreffende (im ruhenden System gemessene) Energie ist offenbar $A^2/8\pi\,(V \cos \varphi - v)$. Die von der Flächeneinheit des Spiegels in der Zeiteinheit sich entfernende Energie ist $A'''^2/8\pi\,(-V \cos \varphi''' + v)$. Die Differenz dieser beiden Ausdrücke ist nach dem Energieprinzip die vom Lichtdrucke in der Zeiteinheit geleistete Arbeit. Setzt man die letztere gleich dem Produkt $P.v$, wobei P der Lichtdruck ist, so erhält man:

$$P = 2 \frac{A^2}{8\pi} \frac{\left(\cos \varphi - \frac{v}{V}\right)^2}{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}.$$

In erster Annäherung erhält man in Übereinstimmung mit der Erfahrung und mit anderen Theorien

$$P = 2 \frac{A^2}{8\pi} \cos^2 \varphi.$$

Nach der hier benutzten Methode können alle Probleme der Optik bewegter Körper gelöst werden. Das Wesentliche ist, daß die elektrische und magnetische Kraft des Lichtes, welches durch einen bewegten Körper beeinflußt wird, auf ein relativ zu dem Körper ruhendes Koordinatensystem transformiert werden. Dadurch wird jedes Problem der Optik bewegter Körper auf eine Reihe von Problemen der Optik ruhender Körper zurückgeführt.

§ 9. **Transformation der Maxwell-Hertzschen Gleichungen mit Berücksichtigung der Konvektionsströme.**

Wir gehen aus von den Gleichungen:

$$\frac{1}{V}\left\{u_x\varrho + \frac{\partial X}{\partial t}\right\} = \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}, \quad \frac{1}{V}\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y},$$

$$\frac{1}{V}\left\{u_y\varrho + \frac{\partial Y}{\partial t}\right\} = \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x}, \quad \frac{1}{V}\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z},$$

$$\frac{1}{V}\left\{u_z\varrho + \frac{\partial Z}{\partial t}\right\} = \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}, \quad \frac{1}{V}\frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x},$$

wobei

$$\varrho = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}$$

die 4π-fache Dichte der Elektrizität und (u_x, u_y, u_z) den Geschwindigkeitsvektor der Elektrizität bedeutet. Denkt man sich die elektrischen Massen unveränderlich an kleine, starre Körper (Ionen, Elektronen) gebunden, so sind diese Gleichungen die elektromagnetische Grundlage der Lorentzschen Elektrodynamik und Optik bewegter Körper.

Transformiert man diese Gleichungen, welche im System K gelten mögen, mit Hilfe der Transformationsgleichungen von § 3 und § 6 auf das System k, so erhält man die Gleichungen:

$$\frac{1}{V}\left\{u_\xi\varrho' + \frac{\partial X'}{\partial \tau}\right\} = \frac{\partial N'}{\partial \eta} - \frac{\partial M'}{\partial \zeta}, \quad \frac{\partial L'}{\partial \tau} = \frac{\partial Y'}{\partial \zeta} - \frac{\partial Z'}{\partial \eta},$$

$$\frac{1}{V}\left\{u_\eta\varrho' + \frac{\partial Y'}{\partial \tau}\right\} = \frac{\partial L'}{\partial \zeta} - \frac{\partial N'}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial M'}{\partial \tau} = \frac{\partial Z'}{\partial \xi} - \frac{\partial X'}{\partial \zeta},$$

$$\frac{1}{V}\left\{u_\zeta\varrho' + \frac{\partial Z'}{\partial \tau}\right\} = \frac{\partial M'}{\partial \xi} - \frac{\partial L'}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial N'}{\partial \tau} = \frac{\partial X'}{\partial \eta} - \frac{\partial Y'}{\partial \xi},$$

wobei

$$\frac{u_x - v}{1 - \frac{u_x v}{V^2}} = u_\xi,$$

$$\frac{u_y}{\beta\left(1 - \frac{u_x v}{V^2}\right)} = u_\eta, \quad \varrho' = \frac{\partial X'}{\partial \xi} + \frac{\partial Y'}{\partial \eta} + \frac{\partial Z'}{\partial \zeta} = \beta\left(1 - \frac{v u_x}{V^2}\right)\varrho.$$

$$\frac{u_z}{\beta\left(1 - \frac{u_x v}{V^2}\right)} = u_\zeta.$$

Da — wie aus dem Additionstheorem der Geschwindigkeiten (§ 5) folgt — der Vektor (u_ξ, u_η, u_ζ) nichts anderes ist als die Geschwindigkeit der elektrischen Massen im System k gemessen, so ist damit gezeigt, daß unter Zugrundelegung unserer kinematischen Prinzipien die elektrodynamische Grundlage der Lorentzschen Theorie der Elektrodynamik bewegter Körper dem Relativitätsprinzip entspricht.

Es möge noch kurz bemerkt werden, daß aus den entwickelten Gleichungen leicht der folgende wichtige Satz gefolgert werden kann: Bewegt sich ein elektrisch geladener Körper beliebig im Raume und ändert sich hierbei seine Ladung nicht, von einem mit dem Körper bewegten Koordinatensystem aus betrachtet, so bleibt seine Ladung auch — von dem „ruhenden" System K aus betrachtet — konstant.

§ 10. Dynamik des (langsam beschleunigten) Elektrons.

In einem elektromagnetischen Felde bewege sich ein punktförmiges, mit einer elektrischen Ladung ε versehenes Teilchen (im folgenden „Elektron" genannt), über dessen Bewegungsgesetz wir nur folgendes annehmen:

Ruht das Elektron in einer bestimmten Epoche, so erfolgt in dem nächsten Zeitteilchen die Bewegung des Elektrons nach den Gleichungen

$$\mu \frac{d^2 x}{d t^2} = \varepsilon X$$

$$\mu \frac{d^2 y}{d t^2} = \varepsilon Y$$

$$\mu \frac{d^2 z}{d t^2} = \varepsilon Z,$$

wobei x, y, z die Koordinaten des Elektrons, μ die Masse des Elektrons bedeutet, sofern dasselbe langsam bewegt ist.

Es besitze nun zweitens das Elektron in einer gewissen Zeitepoche die Geschwindigkeit v. Wir suchen das Gesetz, nach welchem sich das Elektron im unmittelbar darauf folgenden Zeitteilchen bewegt.

Ohne die Allgemeinheit der Betrachtung zu beeinflussen, können und wollen wir annehmen, daß das Elektron in dem Momente, wo wir es ins Auge fassen, sich im Koordinatensprung befinde und sich längs der X-Achse des Systems K mit der Geschwindigkeit v bewege. Es ist dann einleuchtend, daß das Elektron im genannten Momente ($t = 0$) relativ zu einem längs der X-Achse mit der konstanten Geschwindigkeit v parallelbewegten Koordinatensystem k ruht.

Aus der oben gemachten Voraussetzung in Verbindung mit dem Relativitätsprinzip ist klar, daß sich das Elektron in der unmittelbar folgenden Zeit (für kleine Werte von t) vom System k aus betrachtet nach den Gleichungen bewegt:

$$\mu \frac{d^2 \xi}{d \tau^2} = \varepsilon X',$$

$$\mu \frac{d^2 \eta}{d \tau^2} = \varepsilon Y',$$

$$\mu \frac{d^2 \zeta}{d \tau^2} = \varepsilon Z',$$

wobei die Zeichen ξ, η, ζ, τ, X', Y', Z' sich auf das System k beziehen. Setzen wir noch fest, daß für $t = x = y = z = 0$ $\tau = \xi = \eta = \zeta = 0$ sein soll, so gelten die Transformationsgleichungen der §§ 3 und 6, so daß gilt:

$$\begin{aligned}
&\tau = \beta\left(t - \frac{v}{V^2} x\right), && \\
&\xi = \beta\,(x - v\,t), && X' = X, \\
&\eta = y, && Y' = \beta\left(Y - \frac{v}{V} N\right), \\
&\zeta = z, && Z' = \beta\left(Z + \frac{v}{V} M\right).
\end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen transformieren wir die obigen Bewegungsgleichungen vom System k auf das System K und erhalten:

$$\text{(A)} \qquad \left\{\begin{aligned}
\frac{d^2 x}{d t^2} &= \frac{\varepsilon}{\mu} \frac{1}{\beta^3} X, \\
\frac{d^2 y}{d t^2} &= \frac{\varepsilon}{\mu} \frac{1}{\beta} \left(Y - \frac{v}{V} N\right), \\
\frac{d^2 z}{d t^2} &= \frac{\varepsilon}{\mu} \frac{1}{\beta} \left(Z + \frac{v}{V} M\right).
\end{aligned}\right.$$

Wir fragen nun in Anlehnung an die übliche Betrachtungsweise nach der „longitudinalen“ und „transversalen“ Masse des bewegten Elektrons. Wir schreiben die Gleichungen (A) in der Form

$$\mu \beta^3 \frac{d^2 x}{d t^2} = \varepsilon X = \varepsilon X',$$

$$\mu \beta^2 \frac{d^2 y}{d t^2} = \varepsilon \beta \left(Y - \frac{v}{V} N\right) = \varepsilon Y',$$

$$\mu \beta^2 \frac{d^2 z}{d t^2} = \varepsilon \beta \left(Z + \frac{v}{V} M\right) = \varepsilon Z'$$

und bemerken zunächst, daß $\varepsilon X'$, $\varepsilon Y'$, $\varepsilon Z'$ die Komponenten der auf das Elektron wirkenden ponderomotorischen Kraft sind, und zwar in einem in diesem Moment mit dem Elektron mit gleicher Geschwindigkeit wie dieses bewegten System betrachtet. (Diese Kraft könnte beispielsweise mit einer im letzten System ruhenden Federwage gemessen werden.) Wenn wir nun diese Kraft schlechtweg „die auf das Elektron wirkende Kraft" nennen und die Gleichung

$$\text{Massenzahl} \times \text{Beschleunigungszahl} = \text{Kraftzahl}$$

aufrechterhalten, und wenn wir ferner festsetzen, daß die Beschleunigungen im ruhenden System K gemessen werden sollen, so erhalten wir aus obigen Gleichungen:

$$\text{Longitudinale Masse} = \frac{\mu}{\left(\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}\right)^3},$$

$$\text{Transversale Masse} = \frac{\mu}{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}.$$

Natürlich würde man bei anderer Definition der Kraft und der Beschleunigung andere Zahlen für die Massen erhalten; man ersieht daraus, daß man bei der Vergleichung verschiedener Theorien der Bewegung des Elektrons sehr vorsichtig verfahren muß.

Wir bemerken, daß diese Resultate über die Masse auch für die ponderabeln materiellen Punkte gilt; denn ein ponderabler materieller Punkt kann durch Zufügen einer *beliebig kleinen* elektrischen Ladung zu einem Elektron (in unserem Sinne) gemacht werden.

Wir bestimmen die kinetische Energie des Elektrons. Bewegt sich ein Elektron vom Koordinatenursprung des Systems K aus mit der Anfangsgeschwindigkeit 0 beständig auf der

X-Achse unter der Wirkung einer elektrostatischen Kraft X, so ist klar, daß die dem elektrostatischen Felde entzogene Energie den Wert $\int \varepsilon X d x$ hat. Da das Elektron langsam beschleunigt sein soll und infolgedessen keine Energie in Form von Strahlung abgeben möge, so muß die dem elektrostatischen Felde entzogene Energie gleich der Bewegungsenergie W des Elektrons gesetzt werden. Man erhält daher, indem man beachtet, daß während des ganzen betrachteten Bewegungsvorganges die erste der Gleichungen (A) gilt:

$$W = \int \varepsilon X d x = \int_0^v \beta^3 v d v = \mu V^2 \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}} - 1 \right\}.$$

W wird also für $v = V$ unendlich groß. Überlichtgeschwindigkeiten haben — wie bei unseren früheren Resultaten — keine Existenzmöglichkeit.

Auch dieser Ausdruck für die kinetische Energie muß dem oben angeführten Argument zufolge ebenso für ponderable Massen gelten.

Wir wollen nun die aus dem Gleichungssystem (A) resultierenden, dem Experimente zugänglichen Eigenschaften der Bewegung des Elektrons aufzählen.

1. Aus der zweiten Gleichung des Systems (A) folgt, daß eine elektrische Kraft Y und eine magnetische Kraft N dann gleich stark ablenkend wirken auf ein mit der Geschwindigkeit v bewegtes Elektron, wenn $Y = N . v / V$. Man ersieht also, daß die Ermittelung der Geschwindigkeit des Elektrons aus dem Verhältnis der magnetischen Ablenkbarkeit A_m und der elektrischen Ablenkbarkeit A_e nach unserer Theorie für beliebige Geschwindigkeiten möglich ist durch Anwendung des Gesetzes:

$$\frac{A_m}{A_e} = \frac{v}{V}.$$

Diese Beziehung ist der Prüfung durch das Experiment zugänglich, da die Geschwindigkeit des Elektrons auch direkt, z. B. mittels rasch oszillierender elektrischer und magnetischer Felder, gemessen werden kann.

2. Aus der Ableitung für die kinetische Energie des Elektrons folgt, daß zwischen der durchlaufenen Potential-

differenz und der erlangten Geschwindigkeit v des Elektrons die Beziehung gelten muß:

$$P = \int X\,d\,x = \frac{\mu}{\varepsilon} V^2 \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}} - 1 \right\}.$$

3. Wir berechnen den Krümmungsradius R der Bahn, wenn eine senkrecht zur Geschwindigkeit des Elektrons wirkende magnetische Kraft N (als einzige ablenkende Kraft) vorhanden ist. Aus der zweiten der Gleichungen (A) erhalten wir:

$$-\frac{d^2 y}{d\,t^2} = \frac{v^2}{R} = \frac{\varepsilon}{\mu}\,\frac{v}{V}\,N \,.\, \sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}$$

oder

$$R = V^2\,\frac{\mu}{\varepsilon} \cdot \frac{\frac{v}{V}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}} \cdot \frac{1}{N}\,.$$

Diese drei Beziehungen sind ein vollständiger Ausdruck für die Gesetze, nach denen sich gemäß vorliegender Theorie das Elektron bewegen muß.

Zum Schlusse bemerke ich, daß mir beim Arbeiten an dem hier behandelten Probleme mein Freund und Kollege M. Besso treu zur Seite stand und daß ich demselben manche wertvolle Anregung verdanke.

Bern, Juni 1905.

(Eingegangen 30. Juni 1905.)

Does the Inertia of a Body Depend upon its Energy Content?

***Annalen der Physik,* 1905**

13. *Ist die Trägheit eines Körpers von seinem Energieinhalt abhängig?*
von A. Einstein.

Die Resultate einer jüngst in diesen Annalen von mir publizierten elektrodynamischen Untersuchung[1]) führen zu einer sehr interessanten Folgerung, die hier abgeleitet werden soll.

Ich legte dort die Maxwell-Hertzschen Gleichungen für den leeren Raum nebst dem Maxwellschen Ausdruck für die elektromagnetische Energie des Raumes zugrunde und außerdem das Prinzip:

Die Gesetze, nach denen sich die Zustände der physikalischen Systeme ändern, sind unabhängig davon, auf welches von zwei relativ zueinander in gleichförmiger Parallel-Translationsbewegung befindlichen Koordinatensystemen diese Zustandsänderungen bezogen werden (Relativitätsprinzip).

Gestützt auf diese Grundlagen[2]) leitete ich unter anderem das nachfolgende Resultat ab (l. c. § 8):

Ein System von ebenen Lichtwellen besitze, auf das Koordinatensystem (x, y, z) bezogen, die Energie l; die Strahlrichtung (Wellennormale) bilde den Winkel φ mit der x-Achse des Systems. Führt man ein neues, gegen das System (x, y, z) in gleichförmiger Paralleltranslation begriffenes Koordinatensystem (ξ, η, ζ) ein, dessen Ursprung sich mit der Geschwindigkeit v längs der x-Achse bewegt, so besitzt die genannte Lichtmenge — im System (ξ, η, ζ) gemessen — die Energie:

$$l^* = l \frac{1 - \frac{v}{V} \cos\varphi}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}},$$

wobei V die Lichtgeschwindigkeit bedeutet. Von diesem Resultat machen wir im folgenden Gebrauch.

1) A. Einstein, Ann. d. Phys. 17. p. 891. 1905.

2) Das dort benutzte Prinzip der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit ist natürlich in den Maxwellschen Gleichungen enthalten.

42*

Es befinde sich nun im System (x, y, z) ein ruhender Körper, dessen Energie — auf das System (x, y, z) bezogen — E_0 sei. Relativ zu dem wie oben mit der Geschwindigkeit v bewegten System (ξ, η, ζ) sei die Energie des Körpers H_0.

Dieser Körper sende in einer mit der x-Achse den Winkel φ bildenden Richtung ebene Lichtwellen von der Energie $L/2$ (relativ zu (x, y, z) gemessen) und gleichzeitig eine gleich große Lichtmenge nach der entgegengesetzten Richtung. Hierbei bleibt der Körper in Ruhe in bezug auf das System (x, y, z). Für diesen Vorgang muß das Energieprinzip gelten und zwar (nach dem Prinzip der Relativität) in bezug auf beide Koordinatensysteme. Nennen wir E_1 bez. H_1 die Energie des Körpers nach der Lichtaussendung relativ zum System (x, y, z) bez. (ξ, η, ζ) gemessen, so erhalten wir mit Benutzung der oben angegebenen Relation:

$$E_0 = E_1 + \left[\frac{L}{2} + \frac{L}{2}\right],$$

$$H_0 = H_1 + \left[\frac{L}{2}\frac{1 - \frac{v}{V}\cos\varphi}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}} + \frac{L}{2}\frac{1 + \frac{v}{V}\cos\varphi}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}}\right]$$

$$= H_1 + \frac{L}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}}.$$

Durch Subtraktion erhält man aus diesen Gleichungen:

$$(H_0 - E_0) - (H_1 - E_1) = L\left\{\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}} - 1\right\}.$$

Die beiden in diesem Ausdruck auftretenden Differenzen von der Form $H - E$ haben einfache physikalische Bedeutungen. H und E sind Energiewerte desselben Körpers, bezogen auf zwei relativ zueinander bewegte Koordinatensysteme, wobei der Körper in dem einen System (System (x, y, z)) ruht. Es ist also klar, daß die Differenz $H - E$ sich von der kinetischen Energie K des Körpers in bezug auf das andere System (System (ξ, η, ζ)) nur durch eine additive Konstante C unterscheiden kann, welche von der Wahl der willkürlichen additiven Konstanten der Energien H und E abhängt. Wir können also setzen:

$$H_0 - E_0 = K_0 + C,$$
$$H_1 - E_1 = K_1 + C,$$

da C sich während der Lichtaussendung nicht ändert. Wir erhalten also:

$$K_0 - K_1 = L\left\{\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}} - 1\right\}.$$

Die kinetische Energie des Körpers in bezug auf (ξ, η, ζ) nimmt infolge der Lichtaussendung ab, und zwar um einen von den Qualitäten des Körpers unabhängigen Betrag. Die Differenz $K_0 - K_1$ hängt ferner von der Geschwindigkeit ebenso ab wie die kinetische Energie des Elektrons (l. c. § 10).

Unter Vernachlässigung von Größen vierter und höherer Ordnung können wir setzen:

$$K_0 - K_1 = \frac{L}{V^2}\frac{v^2}{2}.$$

Aus dieser Gleichung folgt unmittelbar:

Gibt ein Körper die Energie L in Form von Strahlung ab, so verkleinert sich seine Masse um L/V^2. Hierbei ist es offenbar unwesentlich, daß die dem Körper entzogene Energie gerade in Energie der Strahlung übergeht, so daß wir zu der allgemeineren Folgerung geführt werden:

Die Masse eines Körpers ist ein Maß für dessen Energieinhalt; ändert sich die Energie um L, so ändert sich die Masse in demselben Sinne um $L/9.10^{20}$, wenn die Energie in Erg und die Masse in Grammen gemessen wird.

Es ist nicht ausgeschlossen, daß bei Körpern, deren Energieinhalt in hohem Maße veränderlich ist (z. B. bei den Radiumsalzen), eine Prüfung der Theorie gelingen wird.

Wenn die Theorie den Tatsachen entspricht, so überträgt die Strahlung Trägheit zwischen den emittierenden und absorbierenden Körpern.

Bern, September 1905.

(Eingegangen 27. September 1905.)

On a Heuristic Point of View Concerning the Production and Transformation of Light

Annalen der Physik, **1905**

6. *Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt;*

von A. Einstein.

Zwischen den theoretischen Vorstellungen, welche sich die Physiker über die Gase und andere ponderable Körper gebildet haben, und der Maxwellschen Theorie der elektromagnetischen Prozesse im sogenannten leeren Raume besteht ein tiefgreifender formaler Unterschied. Während wir uns nämlich den Zustand eines Körpers durch die Lagen und Geschwindigkeiten einer zwar sehr großen, jedoch endlichen Anzahl von Atomen und Elektronen für vollkommen bestimmt ansehen, bedienen wir uns zur Bestimmung des elektromagnetischen Zustandes eines Raumes kontinuierlicher räumlicher Funktionen, so daß also eine endliche Anzahl von Größen nicht als genügend anzusehen ist zur vollständigen Festlegung des elektromagnetischen Zustandes eines Raumes. Nach der Maxwellschen Theorie ist bei allen rein elektromagnetischen Erscheinungen, also auch beim Licht, die Energie als kontinuierliche Raumfunktion aufzufassen, während die Energie eines ponderabeln Körpers nach der gegenwärtigen Auffassung der Physiker als eine über die Atome und Elektronen erstreckte Summe darzustellen ist. Die Energie eines ponderabeln Körpers kann nicht in beliebig viele, beliebig kleine Teile zerfallen, während sich die Energie eines von einer punktförmigen Lichtquelle ausgesandten Lichtstrahles nach der Maxwellschen Theorie (oder allgemeiner nach jeder Undulationstheorie) des Lichtes auf ein stets wachsendes Volumen sich kontinuierlich verteilt.

Die mit kontinuierlichen Raumfunktionen operierende Undulationstheorie des Lichtes hat sich zur Darstellung der rein optischen Phänomene vortrefflich bewährt und wird wohl nie durch eine andere Theorie ersetzt werden. Es ist jedoch im Auge zu behalten, daß sich die optischen Beobachtungen auf zeitliche Mittelwerte, nicht aber auf Momentanwerte beziehen, und es ist trotz der vollständigen Bestätigung der Theorie der Beugung, Reflexion, Brechung, Dispersion etc. durch das

Experiment wohl denkbar, daß die mit kontinuierlichen Raumfunktionen operierende Theorie des Lichtes zu Widersprüchen mit der Erfahrung führt, wenn man sie auf die Erscheinungen der Lichterzeugung und Lichtverwandlung anwendet.

Es scheint mir nun in der Tat, daß die Beobachtungen über die „schwarze Strahlung", Photolumineszenz, die Erzeugung von Kathodenstrahlen durch ultraviolettes Licht und andere die Erzeugung bez. Verwandlung des Lichtes betreffende Erscheinungsgruppen besser verständlich erscheinen unter der Annahme, daß die Energie des Lichtes diskontinuierlich im Raume verteilt sei. Nach der hier ins Auge zu fassenden Annahme ist bei Ausbreitung eines von einem Punkte ausgehenden Lichtstrahles die Energie nicht kontinuierlich auf größer und größer werdende Räume verteilt, sondern es besteht dieselbe aus einer endlichen Zahl von in Raumpunkten lokalisierten Energiequanten, welche sich bewegen, ohne sich zu teilen und nur als Ganze absorbiert und erzeugt werden können.

Im folgenden will ich den Gedankengang mitteilen und die Tatsachen anführen, welche mich auf diesen Weg geführt haben, in der Hoffnung, daß der darzulegende Gesichtspunkt sich einigen Forschern bei ihren Untersuchungen als brauchbar erweisen möge.

§ 1. Über eine die Theorie der „schwarzen Strahlung" betreffende Schwierigkeit.

Wir stellen uns zunächst auf den Standpunkt der Maxwellschen Theorie und Elektronentheorie und betrachten folgenden Fall. In einem von vollkommen reflektierenden Wänden eingeschlossenen Raumes befinde sich eine Anzahl Gasmoleküle und Elektronen, welche freibeweglich sind und aufeinander konservative Kräfte ausüben, wenn sie einander sehr nahe kommen, d. h. miteinander wie Gasmoleküle nach der kinetischen Gastheorie zusammenstoßen können.[1]) Eine Anzahl

1) Diese Annahme ist gleichbedeutend mit der Voraussetzung, daß die mittleren kinetischen Energien von Gasmolekülen und Elektronen bei Temperaturgleichgewicht einander gleich seien. Mit Hilfe letzterer Voraussetzung hat Hr. Drude bekanntlich das Verhältnis von thermischem und elektrischem Leitungsvermögen der Metalle auf theoretischem Wege abgeleitet.

Elektronen sei ferner an voneinander weit entfernte Punkte des Raumes gekettet durch nach diesen Punkten gerichtete, den Elongationen proportionale Kräfte. Auch diese Elektronen sollen mit den freien Molekülen und Elektronen in konservative Wechselwirkung treten, wenn ihnen letztere sehr nahe kommen. Wir nennen die an Raumpunkte geketteten Elektronen „Resonatoren“; sie senden elektromagnetische Wellen bestimmter Periode aus und absorbieren solche.

Nach der gegenwärtigen Ansicht über die Entstehung des Lichtes müßte die Strahlung im betrachteten Raume, welche unter Zugrundelegung der Maxwellschen Theorie für den Fall des dynamischen Gleichgewichtes gefunden wird, mit der „schwarzen Strahlung“ identisch sein — wenigstens wenn Resonatoren aller in Betracht zu ziehenden Frequenzen als vorhanden angesehen werden.

Wir sehen vorläufig von der von den Resonatoren emittierten und absorbierten Strahlung ab und fragen nach der der Wechselwirkung (den Zusammenstößen) von Molekülen und Elektronen entsprechenden Bedingung für das dynamische Gleichgewicht. Die kinetische Gastheorie liefert für letzteres die Bedingung, daß die mittlere lebendige Kraft eines Resonatorelektrons gleich der mittleren kinetischen Energie der fortschreitenden Bewegung eines Gasmoleküles sein muß. Zerlegen wir die Bewegung des Resonatorelektrons in drei aufeinander senkrechte Schwingungsbewegungen, so finden wir für den Mittelwert $\bar{E}$ der Energie einer solchen geradlinigen Schwingungsbewegung

$$\bar{E} = \frac{R}{N} T,$$

wobei R die absolute Gaskonstante, N die Anzahl der „wirklichen Moleküle“ in einem Grammäquivalent und T die absolute Temperatur bedeutet. Die Energie $\bar{E}$ ist nämlich wegen der Gleichheit der zeitlichen Mittelwerte von kinetischer und potentieller Energie des Resonators $^2/_3$ mal so groß wie die lebendige Kraft eines freien, einatomigen Gasmoleküles. Würde nun durch irgend eine Ursache — in unserem Falle durch Strahlungsvorgänge — bewirkt, daß die Energie eines Resonators einen größeren oder kleineren zeitlichen Mittelwert als $\bar{E}$ besitzt, so würden die Zusammenstöße mit den freien Elektronen und Molekülen zu einer im Mittel von Null verschiedenen Energieabgabe an das Gas bez. Energieaufnahme von dem Gas führen. Es ist also in dem von uns betrachteten Falle dynamisches Gleichgewicht nur dann möglich, wenn jeder Resonator die mittlere Energie $\bar{E}$ besitzt.

Eine ähnliche Überlegung machen wir jetzt bezüglich der Wechselwirkung der Resonatoren und der im Raume vorhandenen Strahlung. Hr. Planck hat für diesen Fall die Bedingung des dynamischen Gleichgewichtes abgeleitet[1]) unter der Voraussetzung, daß die Strahlung als ein denkbar ungeordnetster Prozeß[2]) betrachtet werden kann. Er fand:

$$\bar{E}_\nu = \frac{L^3}{8\pi\nu^2}\varrho_\nu .$$

$\bar{E}_\nu$ ist hierbei die mittlere Energie eines Resonators von der Eigenfrequenz ν (pro Schwingungskomponente), L die Lichtgeschwindigkeit, ν die Frequenz und $\varrho_\nu d\nu$ die Energie pro Volumeinheit desjenigen Teiles der Strahlung, dessen Schwingungszahl zwischen ν und $\nu + d\nu$ liegt.

1) M. Planck, Ann. d. Phys. 1. p. 99. 1900.

2) Diese Voraussetzung läßt sich folgendermaßen formulieren. Wir entwickeln die Z-Komponente der elektrischen Kraft (Z) in einem beliebigen Punkte des betreffenden Raumes zwischen den Zeitgrenzen $t = 0$ und $t = T$ (wobei T eine relativ zu allen in Betracht zu ziehenden Schwingungsdauern sehr große Zeit bedeute) in eine Fouriersche Reihe

$$Z = \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} A_\nu \sin\left(2\pi\nu\frac{t}{T} + \alpha_\nu\right),$$

wobei $A_\nu \geqq 0$ und $0 \leqq \alpha_\nu \leqq 2\pi$. Denkt man sich in demselben Raumpunkte eine solche Entwickelung beliebig oft bei zufällig gewählten Anfangspunkten der Zeit ausgeführt, so wird man für die Größen A_ν und α_ν verschiedene Wertsysteme erhalten. Es existieren dann für die Häufigkeit der verschiedenen Wertekombinationen der Größen A_ν und α_ν (statistische) Wahrscheinlichkeiten dW von der Form:

$$dW = f(A_1 A_2 \ldots \alpha_1 \alpha_2 \ldots)\, dA_1\, dA_2 \ldots d\alpha_1\, d\alpha_2 \ldots$$

Die Strahlung ist dann eine denkbar ungeordnetste, wenn

$$f(A_1, A_2 \ldots \alpha_1, \alpha_2 \ldots) = F_1(A_1) F_2(A_2) \ldots f_1(\alpha_1) . f_2(\alpha_2) \ldots ,$$

d. h. wenn die Wahrscheinlichkeit eines bestimmten Wertes einer der Größen A bez. α von den Werten, welche die anderen Größen A bez. α besitzen, unabhängig ist. Mit je größerer Annäherung die Bedingung erfüllt ist, daß die einzelnen Paare von Größen A_ν und α_ν von Emissions- und Absorptionsprozessen *besonderer* Resonatorengruppen abhängen, mit desto größerer Annäherung wird also in dem von uns betrachteten Falle die Strahlung als eine „denkbar ungeordnetste" anzusehen sein.

Soll die Strahlungsenergie von der Frequenz ν nicht beständig im Ganzen weder vermindert noch vermehrt werden, so muß gelten:

$$\frac{R}{N} T = \bar{E} = \bar{E}_\nu = \frac{L^3}{8 \pi \nu^2} \varrho_\nu ,$$

$$\varrho_\nu = \frac{R}{N} \frac{8 \pi \nu^2}{L^3} T .$$

Diese als Bedingung des dynamischen Gleichgewichtes gefundene Beziehung entbehrt nicht nur der Übereinstimmung mit der Erfahrung, sondern sie besagt auch, daß in unserem Bilde von einer bestimmten Energieverteilung zwischen Äther und Materie nicht die Rede sein kann. Je weiter nämlich der Schwingungszahlenbereich der Resonatoren gewählt wird, desto größer wird die Strahlungsenergie des Raumes, und wir erhalten in der Grenze

$$\int\limits_0^\infty \varrho_\nu \, d\nu = \frac{R}{N} \frac{8 \pi}{L^3} T \int\limits_0^\infty \nu^2 \, d\nu = \infty .$$

§ 2. Über die Plancksche Bestimmung der Elementarquanta.

Wir wollen im folgenden zeigen, daß die von Hrn. Planck gegebene Bestimmung der Elementarquanta von der von ihm aufgestellten Theorie der „schwarzen Strahlung" bis zu einem gewissen Grade unabhängig ist.

Die allen bisherigen Erfahrungen genügende Plancksche Formel[1]) für ϱ_ν lautet

$$\varrho_\nu = \frac{\alpha \nu^3}{e^{\frac{\beta \nu}{T}} - 1} ,$$

wobei

$$\alpha = 6{,}10 \; . 10^{-56} ,$$

$$\beta = 4{,}866 \, . \, 10^{-11} .$$

Für große Werte von T/ν, d. h. für große Wellenlängen und Strahlungsdichten geht diese Formel in der Grenze in folgende über:

$$\varrho_\nu = \frac{\alpha}{\beta} \nu^2 T .$$

1) M. Planck, Ann. d. Phys. 4. p. 561. 1901.

Man erkennt, daß diese Formel mit der in § 1 aus der Maxwellschen und der Elektronentheorie entwickelten übereinstimmt. Durch Gleichsetzung der Koeffizienten beider Formeln erhält man:

$$\frac{R}{N} \frac{8\pi}{L^3} = \frac{\alpha}{\beta}$$

oder

$$N = \frac{\beta}{\alpha} \frac{8\pi R}{L^3} = 6{,}17 \,.\, 10^{23},$$

d. h. ein Atom Wasserstoff wiegt $1/N$ Gramm $= 1{,}62 \,.\, 10^{-24}$ g. Dies ist genau der von Hrn. Planck gefundene Wert, welcher mit den auf anderen Wegen gefundenen Werten für diese Größe befriedigend übereinstimmt.

Wir gelangen daher zu dem Schlusse: Je größer die Energiedichte und die Wellenlänge einer Strahlung ist, als um so brauchbarer erweisen sich die von uns benutzten theoretischen Grundlagen; für kleine Wellenlängen und kleine Strahlungsdichten aber versagen dieselben vollständig.

Im folgenden soll die „schwarze Strahlung“ im Anschluß an die Erfahrung ohne Zugrundelegung eines Bildes über die Erzeugung und Ausbreitung der Strahlung betrachtet werden.

§ 3. Über die Entropie der Strahlung.

Die folgende Betrachtung ist in einer berühmten Arbeit des Hrn. W. Wien enthalten und soll hier nur der Vollständigkeit halber Platz finden.

Es liege eine Strahlung vor, welche das Volumen v einnehme. Wir nehmen an, daß die wahrnehmbaren Eigenschaften der vorliegenden Strahlung vollkommen bestimmt seien, wenn die Strahlungsdichte $\varrho(\nu)$ für alle Frequenzen gegeben ist.[1] Da Strahlungen von verschiedenen Frequenzen als ohne Arbeitsleistung und ohne Wärmezufuhr voneinander trennbar anzusehen sind, so ist die Entropie der Strahlung in der Form

$$S = v \int_0^\infty \varphi(\varrho, \nu)\, d\nu$$

darstellbar, wobei φ eine Funktion der Variabeln ϱ und ν

1) Diese Annahme ist eine willkürliche. Man wird naturgemäß an dieser einfachsten Annahme so lange festhalten, als nicht das Experiment dazu zwingt, sie zu verlassen.

bedeutet. Es kann φ auf eine Funktion von nur einer Variabeln reduziert werden durch Formulierung der Aussage, daß durch adiabatische Kompression einer Strahlung zwischen spiegelnden Wänden, deren Entropie nicht geändert wird. Wir wollen jedoch hierauf nicht eintreten, sondern sogleich untersuchen, wie die Funktion φ aus dem Strahlungsgesetz des schwarzen Körpers ermittelt werden kann.

Bei der „schwarzen Strahlung“ ist ϱ eine solche Funktion von ν, daß die Entropie bei gegebener Energie ein Maximum ist, d. h. daß

$$\delta \int_0^\infty \varphi(\varrho, \nu)\, d\nu = 0,$$

wenn

$$\delta \int_0^\infty \varrho\, d\nu \qquad = 0.$$

Hieraus folgt, daß für jede Wahl des $\delta\varrho$ als Funktion von ν

$$\int_0^\infty \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \varrho} - \lambda\right) \delta\varrho\, d\nu = 0,$$

wobei λ von ν unabhängig ist. Bei der schwarzen Strahlung ist also $\partial\varphi / \partial\varrho$ von ν unabhängig.

Für die Temperaturzunahme einer schwarzen Strahlung vom Volumen $v = 1$ um dT gilt die Gleichung:

$$dS = \int_{\nu=0}^{\nu=\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial \varrho}\, d\varrho\, d\nu,$$

oder, da $\partial\varphi / \partial\varrho$ von ν unabhängig ist:

$$dS = \frac{\partial \varphi}{\partial \varrho}\, dE.$$

Da dE gleich der zugeführten Wärme und der Vorgang umkehrbar ist, so gilt auch:

$$dS = \frac{1}{T}\, dE.$$

Durch Vergleich erhält man:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \varrho} = \frac{1}{T}.$$

Dies ist das Gesetz der schwarzen Strahlung. Man kann also aus der Funktion φ das Gesetz der schwarzen Strahlung und umgekehrt aus letzterem die Funktion φ durch Integration bestimmen mit Rücksicht darauf, daß φ für $\varrho = 0$ verschwindet.

§ 4. Grenzgesetz für die Entropie der monochromatischen Strahlung bei geringer Strahlungsdichte.

Aus den bisherigen Beobachtungen über die „schwarze Strahlung" geht zwar hervor, daß das ursprünglich von Hrn. W. Wien für die „schwarze Strahlung" aufgestellte Gesetz

$$\varrho = \alpha \nu^3 e^{-\beta \frac{\nu}{T}}$$

nicht genau gültig ist. Dasselbe wurde aber für große Werte von ν / T sehr vollkommen durch das Experiment bestätigt. Wir legen diese Formel unseren Rechnungen zugrunde, behalten aber im Sinne, daß unsere Resultate nur innerhalb gewisser Grenzen gelten.

Aus dieser Formel ergibt sich zunächst:

$$\frac{1}{T} = -\frac{1}{\beta \nu} \lg \frac{\varrho}{\alpha \nu^3}$$

und weiter unter Benutzung der in dem vorigen Paragraphen gefundenen Beziehung:

$$\varphi(\varrho, \nu) = -\frac{\varrho}{\beta \nu}\left\{\lg \frac{\varrho}{\alpha \nu^3} - 1\right\}.$$

Es sei nun eine Strahlung von der Energie E gegeben, deren Frequenz zwischen ν und $\nu + d\nu$ liegt. Die Strahlung nehme das Volumen v ein. Die Entropie dieser Strahlung ist:

$$S = v\,\varphi(\varrho, \nu)\, d\nu = -\frac{E}{\beta \nu}\left\{\lg \frac{E}{v\,\alpha \nu^3 d\nu} - 1\right\}.$$

Beschränken wir uns darauf, die Abhängigkeit der Entropie von dem von der Strahlung eingenommenen Volumen zu untersuchen, und bezeichnen wir die Entropie der Strahlung mit S_0, falls dieselbe das Volumen v_0 besitzt, so erhalten wir:

$$S - S_0 = \frac{E}{\beta \nu} \lg\left(\frac{v}{v_0}\right).$$

Diese Gleichung zeigt, daß die Entropie einer monochromatischen Strahlung von genügend kleiner Dichte nach dem gleichen Gesetze mit dem Volumen variiert wie die Entropie eines idealen Gases oder die einer verdünnten Lösung. Die soeben gefundene Gleichung soll im folgenden interpretiert werden unter Zugrundelegung des von Hrn. Boltzmann in die Physik eingeführten Prinzips, nach welchem die Entropie eines Systems eine Funktion der Wahrscheinlichkeit seines Zustandes ist.

§ 5. Molekulartheoretische Untersuchung der Abhängigkeit der Entropie von Gasen und verdünnten Lösungen vom Volumen.

Bei Berechnung der Entropie auf molekulartheoretischem Wege wird häufig das Wort „Wahrscheinlichkeit“ in einer Bedeutung angewendet, die sich nicht mit der Definition der Wahrscheinlichkeit deckt, wie sie in der Wahrscheinlichkeitsrechnung gegeben wird. Insbesondere werden die „Fälle gleicher Wahrscheinlichkeit“ häufig hypothetisch festgesetzt in Fällen, wo die angewendeten theoretischen Bilder bestimmt genug sind, um statt jener hypothetischen Festsetzung eine Deduktion zu geben. Ich will in einer besonderen Arbeit zeigen, daß man bei Betrachtungen über thermische Vorgänge mit der sogenannten „statistischen Wahrscheinlichkeit“ vollkommen auskommt und hoffe dadurch eine logische Schwierigkeit zu beseitigen, welche der Durchführung des Boltzmannschen Prinzips noch im Wege steht. Hier aber soll nur dessen allgemeine Formulierung und dessen Anwendung auf ganz spezielle Fälle gegeben werden.

Wenn es einen Sinn hat, von der Wahrscheinlichkeit eines Zustandes eines Systems zu reden, wenn ferner jede Entropiezunahme als ein Übergang zu einem wahrscheinlicheren Zustande aufgefaßt werden kann, so ist die Entropie S_1 eines Systems eine Funktion der Wahrscheinlichkeit W_1 seines momentanen Zustandes. Liegen also zwei nicht miteinander in Wechselwirkung stehende Systeme S_1 und S_2 vor, so kann man setzen:

$$S_1 = \varphi_1(W_1),$$
$$S_2 = \varphi_2(W_2).$$

Betrachtet man diese beiden Systeme als ein einziges System von der Entropie S und der Wahrscheinlichkeit W, so ist:

$$S = S_1 + S_2 = \varphi(W)$$

und

$$W = W_1 \,.\, W_2 \,.$$

Die letztere Beziehung sagt aus, daß die Zustände der beiden Systeme voneinander unabhängige Ereignisse sind.

Aus diesen Gleichungen folgt:

$$\varphi(W_1 \cdot W_2) = \varphi_1(W_1) + \varphi_2(W_2)$$

und hieraus endlich

$$\begin{aligned} \varphi_1(W_1) &= C \lg(W_1) + \text{konst.}, \\ \varphi_2(W_2) &= C \lg(W_2) + \text{konst.}, \\ \varphi\ (W) &= C \lg(W) + \text{konst.} \end{aligned}$$

Die Größe C ist also eine universelle Konstante; sie hat, wie aus der kinetischen Gastheorie folgt, den Wert R/N, wobei den Konstanten R und N dieselbe Bedeutung wie oben beizulegen ist. Bedeutet S_0 die Entropie bei einem gewissen Anfangszustande eines betrachteten Systems und W die relative Wahrscheinlichkeit eines Zustandes von der Entropie S, so erhalten wir also allgemein:

$$S - S_0 = \frac{R}{N} \lg W.$$

Wir behandeln zunächst folgenden Spezialfall. In einem Volumen v_0 sei eine Anzahl (n) beweglicher Punkte (z. B. Moleküle) vorhanden, auf welche sich unsere Überlegung beziehen soll. Außer diesen können in dem Raume noch beliebig viele andere bewegliche Punkte irgendwelcher Art vorhanden sein. Über das Gesetz, nach dem sich die betrachteten Punkte in dem Raume bewegen, sei nichts vorausgesetzt, als daß in bezug auf diese Bewegung kein Raumteil (und keine Richtung) von den anderen ausgezeichnet sei. Die Anzahl der betrachteten (ersterwähnten) beweglichen Punkte sei ferner so klein, daß von einer Wirkung der Punkte aufeinander abgesehen werden kann.

Dem betrachteten System, welches z. B. ein ideales Gas oder eine verdünnte Lösung sein kann, kommt eine gewisse Entropie S_0 zu. Wir denken uns einen Teil des Volumens v_0 von der Größe v und alle n beweglichen Punkte in das Volumen v versetzt, ohne daß an dem System sonst etwas geändert wird. Diesem Zustand kommt offenbar ein anderer Wert der Entropie (S) zu, und wir wollen nun die Entropiedifferenz mit Hilfe des Boltzmannschen Prinzips bestimmen.

Wir fragen: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit des letzterwähnten Zustandes relativ zum ursprünglichen? Oder: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß sich in einem zufällig herausgegriffenen Zeitmoment alle n in einem gegebenen Volumen v_0 unabhängig voneinander beweglichen Punkte (zufällig) in dem Volumen v befinden?

Für diese Wahrscheinlichkeit, welche eine „statistische Wahrscheinlichkeit" ist, erhält man offenbar den Wert:

$$W = \left(\frac{v}{v_0}\right)^n ;$$

man erhält hieraus durch Anwendung des Boltzmannschen Prinzipes:

$$S - S_0 = R\left(\frac{n}{N}\right) \lg \left(\frac{v}{v_0}\right).$$

Es ist bemerkenswert, daß man zur Herleitung dieser Gleichung, aus welcher das Boyle-Gay-Lussacsche Gesetz und das gleichlautende Gesetz des osmotischen Druckes leicht thermodynamisch ableiten kann[1]); keine Voraussetzung über das Gesetz zu machen braucht, nachdem sich die Moleküle bewegen.

§ 6. Interpretation des Ausdruckes für die Abhängigkeit der Entropie der monochromatischen Strahlung vom Volumen nach dem Boltzmannschen Prinzip.

Wir haben in § 4 für die Abhängigkeit der Entropie der monochromatischen Strahlung vom Volumen den Ausdruck gefunden:

$$S - S_0 = \frac{E}{\beta \nu} \lg \left(\frac{v}{v_0}\right).$$

Schreibt man diese Formel in der Gestalt:

$$S - S_0 = \frac{R}{N} \lg \left[\left(\frac{v}{v_0}\right)^{\frac{N}{R}\frac{E}{\beta \nu}}\right]$$

---

1) Ist E die Energie des Systems, so erhält man:

$$-d(E - TS) = p\,dv = T\,dS = R\frac{n}{N}\frac{dv}{v};$$

also

$$pv = R\frac{n}{N}T.$$

und vergleicht man sie mit der allgemeinen, das Boltzmannsche Prinzip ausdrückenden Formel

$$S - S_0 = \frac{R}{N} \lg W,$$

so gelangt man zu folgendem Schluß:

Ist monochromatische Strahlung von der Frequenz ν und der Energie E in das Volumen v_0 (durch spiegelnde Wände) eingeschlossen, so ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß sich in einem beliebig herausgegriffenen Zeitmoment die ganze Strahlungsenergie in dem Teilvolumen v des Volumens v_0 befindet:

$$W = \left(\frac{v}{v_0}\right)^{\frac{N}{R}\frac{E}{\beta \nu}}.$$

Hieraus schließen wir weiter:

Monochromatische Strahlung von geringer Dichte (innerhalb des Gültigkeitsbereiches der Wienschen Strahlungsformel) verhält sich in wärmetheoretischer Beziehung so, wie wenn sie aus voneinander unabhängigen Energiequanten von der Größe $R\beta\nu/N$ bestünde.

Wir wollen noch die mittlere Größe der Energiequanten der „schwarzen Strahlung" mit der mittleren lebendigen Kraft der Schwerpunktsbewegung eines Moleküls bei der nämlichen Temperatur vergleichen. Letztere ist $\frac{3}{2}(R/N)T$, während man für die mittlere Größe des Energiequantums unter Zugrundelegung der Wienschen Formel erhält:

$$\frac{\int\limits_0^\infty \alpha \nu^3 e^{-\frac{\beta\nu}{T}} d\nu}{\int\limits_0^\infty \frac{N}{R\beta\nu} \alpha \nu^3 e^{-\frac{\beta\nu}{T}} d\nu} = 3 \frac{R}{N} T.$$

Wenn sich nun monochromatische Strahlung (von hinreichend kleiner Dichte) bezüglich der Abhängigkeit der Entropie vom Volumen wie ein diskontinuierliches Medium verhält, welches aus Energiequanten von der Größe $R\beta\nu/N$ besteht, so liegt es nahe, zu untersuchen, ob auch die Gesetze der

Erzeugung und Verwandlung des Lichtes so beschaffen sind, wie wenn das Licht aus derartigen Energiequanten bestünde. Mit dieser Frage wollen wir uns im folgenden beschäftigen.

§ 7. Über die Stokessche Regel.

Es werde monochromatisches Licht durch Photolumineszenz in Licht anderer Frequenz verwandelt und gemäß dem eben erlangten Resultat angenommen, daß sowohl das erzeugende wie das erzeugte Licht aus Energiequanten von der Größe $(R/N)\beta\nu$ bestehe, wobei ν die betreffende Frequenz bedeutet. Der Verwandlungsprozeß wird dann folgendermaßen zu deuten sein. Jedes erzeugende Energiequant von der Frequenz ν_1 wird absorbiert und gibt — wenigstens bei genügend kleiner Verteilungsdichte der erzeugenden Energiequanten — für sich allein Anlaß zur Entstehung eines Lichtquants von der Frequenz ν_2; eventuell können bei der Absorption des erzeugenden Lichtquants auch gleichzeitig Lichtquanten von den Frequenzen ν_3, ν_4 etc. sowie Energie anderer Art (z. B. Wärme) entstehen. Unter Vermittelung von was für Zwischenprozessen dies Endresultat zustande kommt, ist gleichgültig. Wenn die photolumineszierende Substanz nicht als eine beständige Quelle von Energie anzusehen ist, so kann nach dem Energieprinzip die Energie eines erzeugten Energiequants nicht größer sein als die eines erzeugenden Lichtquants; es muß also die Bezeichnung gelten:

$$\frac{R}{N}\beta\nu_2 \leqq \frac{R}{N}\beta\nu_1$$

oder

$$\nu_2 \leqq \nu_1 .$$

Dies ist die bekannte Stokessche Regel.

Besonders hervorzuheben ist, daß bei schwacher Belichtung die erzeugte Lichtmenge der erregenden unter sonst gleichen Umständen nach unserer Auffassung der erregenden Lichtstärke proportional sein muß, da jedes erregende Energiequant einen Elementarprozeß von der oben angedeuteten Art verursachen wird, unabhängig von der Wirkung der anderen erregenden Energiequanten. Insbesondere wird es keine untere Grenze für die Intensität des erregenden Lichtes geben, unterhalb welcher das Licht unfähig wäre, lichterregend zu wirken.

Abweichungen von der Stokesschen Regel sind nach der dargelegten Auffassung der Phänomene in folgenden Fällen denkbar:

1. wenn die Anzahl der gleichzeitig in Umwandlung begriffenen Energiequanten pro Volumeneinheit so groß ist, daß ein Energiequant des erzeugten Lichtes seine Energie von mehreren erzeugenden Energiequanten erhalten kann;

2. wenn das erzeugende (oder erzeugte) Licht nicht von derjenigen energetischen Beschaffenheit ist, die einer „schwarzen Strahlung" aus dem Gültigkeitsbereich des Wienschen Gesetzes zukommt, wenn also z. B. das erregende Licht von einem Körper so hoher Temperatur erzeugt ist, daß für die in Betracht kommende Wellenlänge das Wiensche Gesetz nicht mehr gilt.

Die letztgenannte Möglichkeit verdient besonderes Interesse. Nach der entwickelten Auffassung ist es nämlich nicht ausgeschlossen, daß eine „nicht Wiensche Strahlung" auch in großer Verdünnung sich in energetischer Beziehung anders verhält als eine „schwarze Strahlung" aus dem Gültigkeitsbereich des Wienschen Gesetzes.

§ 8. Über die Erzeugung von Kathodenstrahlen durch Belichtung fester Körper.

Die übliche Auffassung, daß die Energie des Lichtes kontinuierlich über den durchstrahlten Raum verteilt sei, findet bei dem Versuch, die lichtelektrischen Erscheinungen zu erklären, besonders große Schwierigkeiten, welche in einer bahnbrechenden Arbeit von Hrn. Lenard dargelegt sind.[1])

Nach der Auffassung, daß das erregende Licht aus Energiequanten von der Energie $(R/N)\beta\nu$ bestehe, läßt sich die Erzeugung von Kathodenstrahlen durch Licht folgendermaßen auffassen. In die oberflächliche Schicht des Körpers dringen Energiequanten ein, und deren Energie verwandelt sich wenigstens zum Teil in kinetische Energie von Elektronen. Die einfachste Vorstellung ist die, daß ein Lichtquant seine ganze Energie an ein einziges Elektron abgibt; wir wollen annehmen, daß dies vorkomme. Es soll jedoch nicht ausgeschlossen sein, daß Elektronen die Energie von Lichtquanten nur teilweise aufnehmen. Ein im Innern des Körpers mit kinetischer Energie

1) P. Lenard, Ann. d. Phys. 8. p. 169 u. 170. 1902.

versehenes Elektron wird, wenn es die Oberfläche erreicht hat, einen Teil seiner kinetischen Energie eingebüßt haben. Außerdem wird anzunehmen sein, daß jedes Elektron beim Verlassen des Körpers eine (für den Körper charakteristische) Arbeit P zu leisten hat, wenn es den Körper verläßt. Mit der größten Normalgeschwindigkeit werden die unmittelbar an der Oberfläche normal zu dieser erregten Elektronen den Körper verlassen. Die kinetische Energie solcher Elektronen ist

$$\frac{R}{N}\beta\nu - P.$$

Ist der Körper zum positiven Potential Π geladen und von Leitern vom Potential Null umgeben und ist Π eben imstande, einen Elektrizitätsverlust des Körpers zu verhindern, so muß sein:

$$\Pi\varepsilon = \frac{R}{N}\beta\nu - P,$$

wobei ε die elektrische Masse des Elektrons bedeutet, oder

$$\Pi E = R\beta\nu - P',$$

wobei E die Ladung eines Grammäquivalentes eines einwertigen Ions und P' das Potential dieser Menge negativer Elektrizität in bezug auf den Körper bedeutet.[1])

Setzt man $E = 9{,}6 \,.\, 10^3$, so ist $\Pi \,.\, 10^{-8}$ das Potential in Volts, welches der Körper bei Bestrahlung im Vakuum annimmt.

Um zunächst zu sehen, ob die abgeleitete Beziehung der Größenordnung nach mit der Erfahrung übereinstimmt, setzen wir $P' = 0$, $\nu = 1{,}03 \,.\, 10^{15}$ (entsprechend der Grenze des Sonnenspektrums nach dem Ultraviolett hin) und $\beta = 4{,}866 \,.\, 10^{-11}$. Wir erhalten $\Pi \,.\, 10^7 = 4{,}3$ Volt, welches Resultat der Größenordnung nach mit den Resultaten von Hrn. Lenard übereinstimmt.[2])

Ist die abgeleitete Formel richtig, so muß Π, als Funktion der Frequenz des erregenden Lichtes in kartesischen Koordinaten dargestellt, eine Gerade sein, deren Neigung von der Natur der untersuchten Substanz unabhängig ist.

---

1) Nimmt man an, daß das einzelne Elektron durch das Licht aus einem neutralen Molekül unter Aufwand einer gewissen Arbeit losgelöst werden muß, so hat man an der abgeleiteten Beziehung nichts zu ändern; nur ist dann P' als Summe von zwei Summanden aufzufassen.

2) P. Lenard, Ann. d. Phys. 8. p. 165 u. 184. Taf. I, Fig. 2. 1902.

Mit den von Hrn. Lenard beobachteten Eigenschaften der lichtelektrischen Wirkung steht unsere Auffassung, soweit ich sehe, nicht im Widerspruch. Wenn jedes Energiequant des erregenden Lichtes unabhängig von allen übrigen seine Energie an Elektronen abgibt, so wird die Geschwindigkeitsverteilung der Elektronen, d. h. die Qualität der erzeugten Kathodenstrahlung von der Intensität des erregenden Lichtes unabhängig sein; andererseits wird die Anzahl der den Körper verlassenden Elektronen der Intensität des erregenden Lichtes unter sonst gleichen Umständen proportional sein.[1])

Über die mutmaßlichen Gültigkeitsgrenzen der erwähnten Gesetzmäßigkeiten wären ähnliche Bemerkungen zu machen wie bezüglich der mutmaßlichen Abweichungen von der Stokesschen Regel.

Im vorstehenden ist angenommen, daß die Energie wenigstens eines Teiles der Energiequanten des erzeugenden Lichtes je an ein einziges Elektron vollständig abgegeben werde. Macht man diese naheliegende Voraussetzung nicht, so erhält man statt obiger Gleichung die folgende:

$$\Pi E + P' \leqq R \beta \nu .$$

Für die Kathodenlumineszenz, welche den inversen Vorgang zu dem eben betrachteten bildet, erhält man durch eine der durchgeführten analoge Betrachtung:

$$\Pi E + P' \geqq R \beta \nu .$$

Bei den von Hrn. Lenard untersuchten Substanzen ist PE stets bedeutend größer als $R \beta \nu$, da die Spannung, welche die Kathodenstrahlen durchlaufen haben müssen, um eben sichtbares Licht erzeugen zu können, in einigen Fällen einige Hundert, in anderen Tausende von Volts beträgt.[2]) Es ist also anzunehmen, daß die kinetische Energie eines Elektrons zur Erzeugung vieler Lichtenergiequanten verwendet wird.

§ 9. Über die Ionisierung der Gase durch ultraviolettes Licht.

Wir werden anzunehmen haben, daß bei der Ionisierung eines Gases durch ultraviolettes Licht je ein absorbiertes Licht-

1) P. Lenard, l. c. p. 150 und p. 166—168.
2) P. Lenard, Ann. d. Phys. 12. p. 469. 1903.

10*

energiequant zur Ionisierung je eines Gasmoleküles verwendet wird. Hieraus folgt zunächst, daß die Ionisierungsarbeit (d. h. die zur Ionisierung theoretisch nötige Arbeit) eines Moleküles nicht größer sein kann als die Energie eines absorbierten wirksamen Lichtenergiequantes. Bezeichnet man mit J die (theoretische) Ionisierungsarbeit pro Grammäquivalent, so muß also sein:

$$R\beta\nu \geqq J.$$

Nach Messungen Lenards ist aber die größte wirksame Wellenlänge für Luft ca. $1{,}9 \,.\, 10^{-5}$ cm, also

$$R\beta\nu = 6{,}4 \,.\, 10^{12} \text{ Erg} \geqq J.$$

Eine obere Grenze für die Ionisierungsarbeit gewinnt man auch aus den Ionisierungsspannungen in verdünnten Gasen. Nach J. Stark[1]) ist die kleinste gemessene Ionisierungsspannung (an Platinanoden) für Luft ca. 10 Volt.[2]) Es ergibt sich also für J die obere Grenze $9{,}6 \,.\, 10^{12}$, welche nahezu gleich der eben gefundenen ist. Es ergibt sich noch eine andere Konsequenz, deren Prüfung durch das Experiment mir von großer Wichtigkeit zu sein scheint. Wenn jedes absorbierte Lichtenergiequant ein Molekül ionisiert, so muß zwischen der absorbierten Lichtmenge L und der Anzahl j der durch dieselbe ionisierten Grammoleküle die Beziehung bestehen:

$$j = \frac{L}{R\beta\nu}.$$

Diese Beziehung muß, wenn unsere Auffassung der Wirklichkeit entspricht, für jedes Gas gelten, welches (bei der betreffenden Frequenz) keine merkliche nicht von Ionisation begleitete Absorption aufweist.

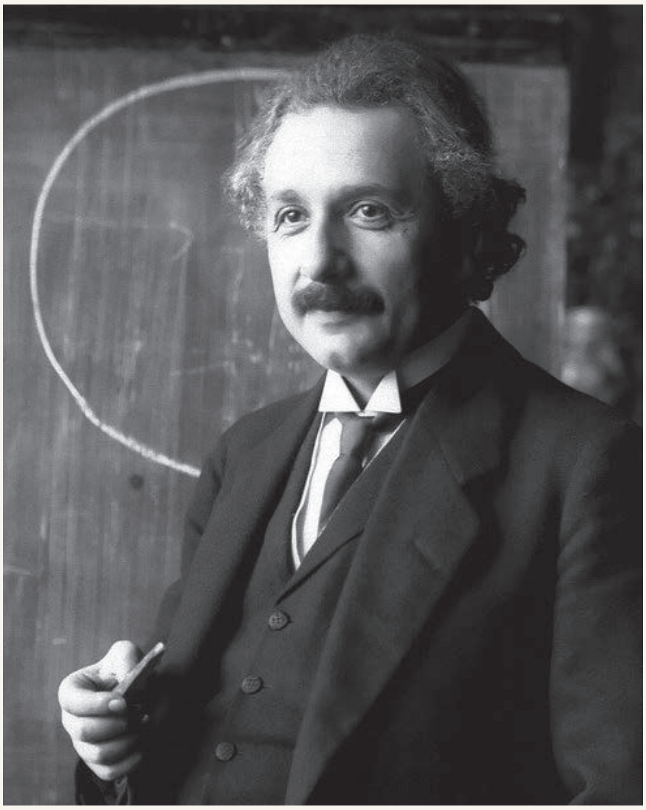
Bern, den 17. März 1905.

1) J. Stark, Die Elektrizität in Gasen p. 57. Leipzig 1902.

2) Im Gasinnern ist die Ionisierungsspannung für negative Ionen allerdings fünfmal größer.

(Eingegangen 18. März 1905.)

Quantum of Light – Einstein's 1921 Nobel Prize



Albert Einstein lecturing in Vienna, 1921
Photo: Ferdinand Schmutzer, Public Domain via Wikimedia Commons

Albert Einstein was awarded the Nobel Prize in 1921 "for his services to Theoretical Physics, and especially for his discovery of the law of the photoelectric effect." It was in his 1905 study on this effect that Einstein had formulated his light quantum hypothesis. This states that light consists of tiny packets (quanta) of energy. If the energy of light shining on a metallic surface is sufficient, the surface will emit electrons. This releases an electrical charge that can be measured: a phenomenon known as the photoelectric effect. Although this effect had long been known in physics, Einstein was the first to explain it correctly. Only some twenty years later was the light quantum hypothesis confirmed experimentally.

Because the Nobel Committee for Physics decided in 1921 that none of the nominations met the criteria for a prize, Albert Einstein did not receive his Nobel Prize until November 1922, when it was awarded to him retroactively. Unfortunately, the physicist was unable to attend the official award ceremony held in Stockholm in December as he was on a lecture tour in Japan. The envoy of Germany, Rudolf Nadolny, therefore stepped in to accept the prize on Einstein's behalf and delivered a speech of thanks at the subsequent banquet.

Albert Einstein delivering his Nobel Lecture to the Nordic Assembly of Naturalists at Gothenburg, 11 July 1923
Photo: Anders Wilhelm Karnell, Gothenburg Library Archive, Public Domain via Wikimedia Commons

Albert Einstein's Nobel Diploma

ALBERT EINSTEIN

Fundamental ideas and problems of the theory of relativity

*Lecture delivered to the Nordic Assembly of Naturalists at Gothenburg**
July 11, 1923

If we consider that part of the theory of relativity which may nowadays in a sense be regarded as bona fide scientific knowledge, we note two aspects which have a major bearing on this theory. The whole development of the theory turns on the question of whether there are physically preferred states of motion in Nature (physical relativity problem). Also, concepts and distinctions are only admissible to the extent that observable facts can be assigned to them without ambiguity (stipulation that concepts and distinctions should have meaning). This postulate, pertaining to epistemology, proves to be of fundamental importance.

These two aspects become clear when applied to a special case, e.g. to classical mechanics. Firstly we see that at any point filled with matter there exists a preferred state of motion, namely that of the substance at the point considered. Our problem starts however with the question whether physically preferred states of motion exist in reference to *extensive* regions. From the viewpoint of classical mechanics the answer is in the affirmative; the physically preferred states of motion from the viewpoint of mechanics are those of the inertial frames.

This assertion, in common with the basis of the whole of mechanics as it generally used to be described before the relativity theory, far from meets the above "stipulation of meaning". Motion can only be conceived as the relative motion of bodies. In mechanics, motion relative to the system of coordinates is implied when merely motion is referred to. Nevertheless this interpretation does not comply with the "stipulation of meaning" if the coordinate system is considered as something purely imaginary. If we turn our attention to experimental physics we see that there the coordinate system is invariably represented by a "practically rigid" body. Furthermore it is assumed that such rigid bodies can be positioned in rest relative to one another

* The Lecture was not delivered on the occasion of the Nobel Prize award, and did not, therefore, concern the discovery of the photoelectric effect.

in common with the bodies of Euclidian geometry. Insofar as we may think of the rigid measuring body as existing as an object which can be experienced, the "system of coordinates" concept as well as the concept of the motion of matter relative thereto can be accepted in the sense of the "stipulation of meaning". At the same time Euclidian geometry, by this conception, has been adapted to the requirements of the physics of the "stipulation of meaning". The question whether Euclidian geometry is valid becomes physically significant; its validity is assumed in classical physics and also later in the special theory of relativity.

In classical mechanics the inertial frame and time are best defined together by a suitable formulation of the law of inertia: It is possible to fix the time and assign a state of motion to the system of coordinates (inertial frame) such that, with reference to the latter, force-free material points undergo no acceleration; furthermore it is assumed that this time can be measured without disagreement by identical clocks (systems which run down periodically) in any arbitrary state of motion. There are then an infinite number of inertial frames which are in uniform translational motion relative to each other, and hence there is also an infinite number of mutually equivalent, physically preferred states of motion. Time is absolute, i.e.independent of the choice of the particular inertial frame; it is defined by more characteristics than logically necessary, although - as implied by mechanics - this should not lead to contradictions with experience. Note in passing that the logical weakness of this exposition from the point of view of the stipulation of meaning is the lack of an experimental criterion for whether a material point is force-free or not; therefore the concept of the inertial frame remains rather problematical. This deficiency leads to the general theory of relativity. We shall not consider it for the moment.

The concept of the rigid body (and that of the clock) has a key bearing on the foregoing consideration of the fundamentals of mechanics, a bearing which there is some justification for challenging. The rigid body is only approximately achieved in Nature, not even with desired approximation; this concept does not therefore strictly satisfy the "stipulation of meaning". It is also logically unjustifiable to base all physical consideration on the rigid or solid body and then finally reconstruct that body atomically by means of elementary physical laws which in turn have been determined by means of the rigid measuring body. I am mentioning these deficiencies of method because in the same sense they are also a feature of the relativity theory in the schematic exposition which I am advocating here. Certainly it would be logically more correct to begin with the whole of the laws and to apply the "stipulation of meaning" to this whole first, i.e. to put the unambiguous relation to the world of experience last instead of already fulfilling it in an imperfect form for an artificially isolated part, namely the space-time metric. We are not, however, sufficiently advanced in our knowledge of Nature's elementary laws to adopt this more perfect method without going out of our depth. At the close of our considerations we shall see that in the most recent studies there is an attempt, based on ideas by Levi-Civita, Weyl, and Eddington, to implement that logically purer method.

It more clearly follows from the above what is implied by "preferred states of motion". They are preferred as regards the laws of Nature. States of motion are preferred when, relative to the formulation of the laws of Nature, coordinate systems within them are distinguished in that with respect to them those laws assume a form preferred by simplicity. According to classical mechanics the states of motion of the inertial frames in this sense are physically preferred. Classical mechanics permits a distinction to be made between (absolutely) unaccelerated and accelerated motions; it also claims that velocities have only a relative existence (dependent on the selection of the inertial frame), while accelerations and rotations have an absolute existence (independent of the selection of the inertial frame). This state of affairs can be expressed thus: According to classical mechanics "velocity relativity" exists, but not "acceleration relativity". After these preliminary considerations we can pass to the actual topic of our contemplations, the relativity theory, by characterizing its development so far in terms of principles.

The special theory of relativity is an adaptation of physical principles to Maxwell-Lorentz electrodynamics. From earlier physics it takes the assumption that Euclidian geometry is valid for the laws governing the position of rigid bodies, the inertial frame and the law of inertia. The postulate of equivalence of inertial frames for the formulation of the laws of Nature is assumed to be valid for the whole of physics (special relativity principle). From Maxwell-Lorentz electrodynamics it takes the postulate of invariance of the velocity of light in a vacuum (light principle).

To harmonize the relativity principle with the light principle, the assumption that an absolute time (agreeing for all inertial frames) exists, had to be abandoned. Thus the hypothesis is abandoned that arbitrarily moved and suitably set identical clocks function in such a way that the times shown by two of them, which meet, agree. A specific time is assigned to each inertial frame; the state of motion and the time of the inertial frame are defined, in accordance with the stipulation of meaning, by the requirement that the light principle should apply to it. The existence of the inertial frame thus defined and the validity of the law of inertia with respect to it are assumed. The time for each inertial frame is measured by identical clocks that are stationary relative to the frame.

The laws of transformation for space coordinates and time for the transition from one inertial frame to another, the Lorentz transformations as they are termed, are unequivocally established by these definitions and the hypotheses concealed in the assumption that they are free from contradiction. Their immediate physical significance lies in the effect of the motion relative to the used inertial frame on the form of rigid bodies (Lorentz contraction) and on the rate of the clocks. According to the special relativity principle the laws of Nature must be covariant relative to Lorentz transformations; the theory thus provides a criterion for general laws of Nature. It leads in particular to a modification of the Newtonian point motion law in which the velocity of light in a vacuum is considered the limiting velocity, and it also leads to the realization that energy and inertial mass are of like nature.

The special relativity theory resulted in appreciable advances. It reconciled mechanics and electrodynamics. It reduced the number of logically independent hypotheses regarding the latter. It enforced the need for a clarification of the fundamental concepts in epistemological terms. It united the momentum and energy principle, and demonstrated the like nature of mass and energy. Yet it was not entirely satisfactory - quite apart from the quantum problems, which all theory so far has been incapable of really solving. In common with classical mechanics the special relativity theory favours certain states of motion - namely those of the inertial frames - to all other states of motion. This was actually more difficult to tolerate than the preference for a single state of motion as in the case of the theory of light with a stationary ether, for this imagined a real reason for the preference, i.e. the light ether. A theory which from the outset prefers no state of motion should appear more satisfactory. Moreover the previously mentioned vagueness in the definition of the inertial frame or in the formulation of the law of inertia raises doubts which obtain their decisive importance, owing to the empirical principle for the equality of the inertial and heavy mass, in the light of the following consideration.

Let K be an inertial frame without a gravitational field, K' a system of coordinates accelerated uniformly relative to K. The behaviour of material points relative to K' is the the same as if K' were an inertial frame in respect of which a homogeneous gravitational field exists. On the basis of the empirically known properties of the gravitational field, the definition of the inertial frame thus proves to be weak. The conclusion is obvious that any arbitrarily moved frame of reference is equivalent to any other for the formulation of the laws of Nature, that there are thus no physically preferred states of motion at all in respect of regions of finite extension (general relativity principle).

The implementation of this concept necessitates an even more profound modification of the geometric-kinematical principles than the special relativity theory. The Lorentz contraction, which is derived from the latter, leads to the conclusion that with regard to a system K′ arbitrarily moved relative to a (gravity field free) inertial frame K, the laws of Euclidian geometry governing the position of rigid (at rest relative to K′) bodies do not apply. Consequently the Cartesian system of coordinates also loses its significance in terms of the stipulation of meaning. Analogous reasoning applies to time; with reference to K′ the time can no longer meaningfully be defined by the indication on identical clocks at rest relative to K′, nor by the law governing the propagation of light. Generalizing, we arrive at the conclusion that gravitational field and metric are only different manifestations of the same physical field.

We arrive at the formal description of this field by the following consideration. For each infinitesimal point-environment in an arbitrary gravitational field a local frame of coordinates can be given for such a state of motion that relative to this local frame no gravitational field exists (local inertial frame). In terms of this inertial frame we may regard the results of the special relativity theory as correct to a first approximation for this infinitesimally small region. There are an infinite number of such local inertial frames at any space-time point; they are associated by Lorentz transformations. These latter are characterised in that they leave invariant the "distance" ds of two infinitely adjacent point events - defined by the equation:

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

which distance can be measured by means of scales and clocks. For, x, y, z, t represent coordinates and time measured with reference to a local inertial frame.

To describe space-time regions of finite extent arbitrary point coordinates in four dimensions are required which serve no other purpose than to provide an unambiguous designation of the space-time points by four numbers each, x_1, x_2, x_3 and x_4, which takes account of the continuity of this four-dimensional manifold (Gaussian coordinates). The mathematical expression of the general relativity principle is then, that the systems of equations expressing the general laws of Nature are equal for all such systems of coordinates.

Since the coordinate differentials of the local inertial frame are expressed linearly by the differentials dx_ν of a Gaussian system of coordinates, when the latter is used, for the distance ds of two events an expression of the form

$$ds^2 = \Sigma g_{\mu\nu}\, dx_\mu dx_\nu \quad (g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu})$$

is obtained. The $g_{\mu\nu}$ which arc continuous functions of x_ν, determine the metric in the four-dimensional manifold where ds is defined as an (absolute) parameter measurable by means of rigid scales and clocks. These same parameters $g_{\mu\nu}$ however also describe with reference to the Gaussian system of coordinates the gravitational field which we have previously found to be identical with the physical cause of the metric. The case as to the validity of the special relativity theory for finite regions is characterised in that when the system of coordinates is suitably chosen, the values of $g_{\mu\nu}$ for finite regions are independent of x_ν.

In accordance with the general theory of relativity the law of point motion in the pure gravitational field is expressed by the equation for the geodetic line. Actually the geodetic line is the simplest mathematically which in the special case of constant $g_{\mu\nu}$ becomes rectilinear. Here therefore we are confronted with the transfer of Galileo's law of inertia to the general theory of relativity.

In mathematical terms the search for the field equations amounts to ascertaining the simplest generally covariant differential equations to which the gravitational potentials $g_{\mu\nu}$ can be subjected. By definition these equations should not contain higher derivatives of $g_{\mu\nu}$ with respect to x_ν than the second, and these only linearly, which condition reveals these equations to be a logical transfer of the Poisson field equation of the Newtonian theory of gravity to the general theory of relativity.

The considerations mentioned led to the theory of gravity which yields the Newtonian theory as a first approximation and furthermore it yields the motion of the perihelion of Mercury, the deflection of light by the sun, and the red shift of spectral lines in agreement with experience.*

* As regards the red shift, the agreement with experience is not yet completely assured, however.

To complete the basis of the general theory of relativity, the electromagnetic field must still be introduced into it which, according to our present conviction, is also the material from which we must build up the elementary structures of matter. The Maxwellian field equations can readily be adopted into the general theory of relativity. This is a completely unambiguous adoption provided it is assumed that the equations contain no differential quotients of $g_{\mu\nu}$ higher than the first, and that in the customary Maxwellian form they apply in the local inertial frame. It is also easily possible to supplement the gravitational field equations by electromagnetic terms in a manner specified by the Maxwellian equations so that they contain the gravitational effect of the electromagnetic field.

These field equations have not provided a theory of matter. To incorporate the field generating effect of ponderable masses in the theory, matter had therefore (as in classical physics) to be introduced into the theory in an approximate, phenomenological representation.

And that exhausts the direct consequences of the relativity principle. I shall turn to those problems which are related to the development which I have traced. Already Newton recognized that the law of inertia is unsatisfactory in a context so far unmentioned in this exposition, namely that it gives no real cause for the special physical position of the states of motion of the inertial frames relative to all other states of motion. It makes the observable material bodies responsible for the gravitational behaviour of a material point, yet indicates no material cause for the inertial behaviour of the material point but devises the cause for it (absolute space or inertial ether). This is not logically inadmissible although it is unsatisfactory. For this reason E. Mach demanded a modification of the law of inertia in the sense that the inertia should be interpreted as an acceleration resistance of the bodies against *one another* and not against "space". This interpretation governs the expectation that accelerated bodies have concordant accelerating action in the same sense on other bodies (acceleration induction).

This interpretation is even more plausible according to general relativity which eliminates the distinction between inertial and gravitational effects. It amounts to stipulating that, apart from the arbitrariness governed by the free choice of coordinates, the $g_{\mu\nu}$-field shall be completely determined by the matter. Mach's stipulation is favoured in general relativity by the circumstance that acceleration induction in accordance with the gravitational field equations really exists, although of such slight intensity that direct detection by mechanical experiments is out of the question.

Mach's stipulation can be accounted for in the general theory of relativity by regarding the world in spatial terms as finite and self-contained. This hypothesis also makes it possible to assume the mean density of matter in the world as finite, whereas in a spatially infinite (quasi-Euclidian) world it should disappear. It cannot, however, be concealed that to satisfy Mach's postulate in the manner referred to a term with no experimental basis whatsoever must be introduced into the field equations, which term logically is in no way determined by the other terms in the equations. For this reason this solution of the "cosmological problem" will not be completely satisfactory for the time being.

A second problem which at present is the subject of lively interest is the identity between the gravitational field and the electromagnetic field. The mind striving after unification of the theory cannot be satisfied that two fields should exist which, by their nature, are quite independent. A mathematically unified field theory is sought in which the gravitational field and the electromagnetic field are interpreted only as different components or manifestations of the same uniform field, the field equations where possible no longer consisting of logically mutually independent summands.

The gravitational theory, considered in terms of mathematical formalism, i.e. Riemannian geometry, should be generalized so that it includes the laws of the electromagnetic field. Unfortunately we are unable here to base ourselves on empirical facts as when deriving the gravitational theory (equality of the inertial and heavy mass), but we are restricted to the criterion of mathematical simplicity which is not free from arbitrariness. The attempt which at present appears the most successful is that, based on the ideas of Levi-Civita, Weyl and Eddington, to replace Riemannian metric geometry by the more general theory of affine correlation.

The characteristic assumption of Riemannian geometry is the attribution to two infinitely adjacent points of a "distance" ds, the square of which is a homogeneous second order function of the coordinate differentials. It follows from this that (apart from certain conditions of reality) Euclidian geometry is valid in any infinitely small region. Hence to every line element (or vector) at a point P is assigned a parallel and equal line element (or vector) through any given infinitesimally adjacent point P' (affine correlation). Riemannian metric determines an affine correlation. Conversely, however, when an affine correlation (law of infinitesimal parallel displacement) is mathematically given, generally no Riemannian metric determination exists from which it can be derived.

The most important concept of Riemannian geometry, "space curvature", on which the gravitational equations are also based, is based exclusively on the "affine correlation". If one is given in a continuum, without first proceeding from a metric, it constitutes a generalization of Riemannian geometry but which still retains the most important derived parameters. By seeking the simplest differential equations which can be obeyed by an affine correlation there is reason to hope that a generalization of the gravitation equations will be found which includes the laws of the electromagnetic field. This hope has in fact been fulfilled although I do not know whether the formal connection so derived can really be regarded as an enrichment of physics as long as it does not yield any new physical connections. In particular a field theory can, to my mind, only be satisfactory when it permits the elementary electrical bodies to be represented as solutions free from singularities.

Moreover it should not be forgotten that a theory relating to the elementary electrical structures is inseparable from the quantum theory problems. So far also relativity theory has proved ineffectual in relation to this most profound physical problem of the present time. Should the form of the general equations some day, by the solution of the quantum problem, undergo a change however profound, even if there is a complete change in the parameters by means of which we represent the elementary process, the relativity principle will not be relinquished and the laws previously derived therefrom will at least retain their significance as limiting laws.

Lecture delivered to the Nordic Assembly of Naturalists at Gothenburg, 11 July 1923

With Thanks to the Contributors

In the preparation of this publication, the University of Zurich was supported by several people and institutions.

We are particularly grateful to the Swedish Embassy for organizing the roundtable discussion at the University of Zurich and ETH Zurich in commemoration of the 100th anniversary of Albert Einstein's Nobel Prize. We also thank the Nobel Foundation for the generous support and for granting their copyrights for this publication. We much appreciate the initiative and support of Jan Knutsson, Swedish Ambassador to Switzerland and the Principality of Liechtenstein, as well as Vidar Helgesen, Executive Director of the Nobel Foundation, and their fascinating editorial.

Furthermore, we would like to express our appreciation to Joël Mesot and ETH Zurich for the excellent cooperation, without which this publication would not have been possible.

We are thankful to Jürg Fröhlich and Daniel Wyler for introducing us to Einstein's theories in their insightful article on his most celebrated accomplishments. We also thank Mathias Plüss for his vivid description of Albert Einstein's time in Zurich.

We further thank Frank Rühli, Dean of the Faculty of Medicine of the University of Zurich, Martin Akeret, Head of UZH Archives, and our colleagues at the Zentralbibliothek Zürich, the UZH Foundation and the State Archives of the Canton of Zurich.

Finally, our thanks go to Andrea Müller from the General Secretariat of the University of Zurich for coordinating and implementing this publication.

PUBLISHING INFORMATION

Publisher
University of Zurich (UZH)

Project management
Andrea Müller

Editors
Andrea Müller
Roger Nickl

Design
Anita Lussman Aragão

Illustration
Tara von Grebel

Authors
Jürg Fröhlich
Vidar Helgesen
Jan Knutsson
Joël Mesot
Mathias Plüss
Michael Schaepman
Daniel Wyler

Translation and proofreading
UZH English Language Services

Printed by
Heller Druck AG, Sinserstrasse 2, 6330 Cham

Circulation
100

Contact
University of Zurich
Communications
Seilergraben 49
CH-8001 Zurich
Phone: +41 44 634 44 30

FSC
www.fsc.org
FSC® C031954

gedruckt in der schweiz