

Anwendungsaufgaben zur Festkörperphysik HS 2025

1) Bravais-Gitter

Weshalb kommt ein tetragonal basiszentriertes Bravaisgitter nicht vor?

2) Kubische Gitter

Geben Sie für einfach kubische, bcc und fcc Gitter der Gitterkonstante a die folgenden Grössen an:

- Volumen der Einheitszelle
- Anzahl primitiver Gitterpunkte pro Einheitszelle
- Volumen der primitiven Elementarzelle
- Zahl der nächsten Nachbarn (sog. Koordinationszahl)
- Abstand nächster Nachbarn
- Packungsdichte bei sich berührenden kugelförmigen Atomen

3) Gitterkonstante von Au

Gold hat ein kubisches fcc Gitter und eine Dichte von 19.3 g/cm^3 . Berechnen Sie die Gitterkonstante, den Abstand nächster Nachbarn und den Radius eines Goldatoms (Annahme: sich berührende Kugeln).

4) Wigner-Seitz-Zelle

Konstruieren Sie die Wigner-Seitz-Zelle des orthorhombisch basiszentrierten Gitters falls $a_1:a_2:a_3 = 4:2:3$.

5) Kugelpackungen

Bestimmen Sie das Verhältnis c/a einer idealen hexagonal dicht gepackten Kugelpackung (hcp). Ist die Packungsdichte einer fcc Kugelpackung grösser oder kleiner als die einer hcp Kugelpackung?

6) Strukturamplitude

Berechnen Sie die Strukturamplitude S als Funktion von hkl für die NaCl Struktur unter der Annahme, dass die atomaren Streufaktoren f für Na und Cl jeweils konstant aber verschieden sind.

Was würde geschehen, wenn die Atome identische atomare Streufaktoren hätten?
 Welche real vorkommende Substanz mit NaCl Struktur entspricht dieser Annahme
 wohl am ehesten?

7) Atomarer Streufaktor

Berechnen Sie den atomaren Streufaktor f für eine homogen geladene Kugel der
 Ladung Z und mit Radius R als Funktion von Δk . Stellen Sie f als Funktion des
 Streuwinkels $\sin(\Theta)$ dar falls $\lambda = R$ angenommen wird.

N.B.: Der atomare Streufaktor ist für ein gegebenes Atom ganz allgemein gegeben
 durch seine Elektronendichteverteilung $n(\vec{r})$ (resp. die Ladungsdichteverteilung
 $\rho(\vec{r}) = en(\vec{r})$) gemäss

$$f(\Delta\vec{k}) = \iiint n(\vec{r}) e^{i\Delta\vec{k} \cdot \vec{r}} d^3r.$$

Integrieren Sie über das Kugelvolumen in entsprechend geeigneten Koordinaten mit n
 $= \text{const.}$ (n kann aus Z und R berechnet werden).

8) Debye-Waller Faktor und Nullpunktsschwingung

Vergleichen Sie den atomaren Streufaktor $f(\sin(\Theta))$ (normiert auf 1 für $\Theta = 0^\circ$) aus
 Aufgabe 11 für $\lambda = R$ in einer Grafik mit den Debye-Waller-Faktoren für $T = 4.2$ K
 und $T = 300$ K, falls Li Atome ($R = 0.123$ nm) mit einer Schwingungsfrequenz von
 5×10^{13} Hz betrachtet werden. Wie gross ist der Effekt der Nullpunktsschwingung der
 Atome im Vergleich dazu?

9) Reziproke Gittervektoren

a) Zeigen Sie, dass ein reziproker Gittervektor $\vec{G}_{hkl} = h\vec{b}_1 + k\vec{b}_2 + l\vec{b}_3$ stets senkrecht
 zu den Netzebenen (hkl) steht.

b) (fakultativ): Zeigen Sie, dass der Abstand d_{hkl} zweier Netzebenen mit den
 Miller'schen Indices (hkl) gegeben ist durch $d_{hkl} = \frac{2\pi N}{|h\vec{b}_1 + k\vec{b}_2 + l\vec{b}_3|}$. Was bedeutet hier
 die Zahl N ?

10) Reziprokes Gitter

Bestimmen Sie die reziproken Gittervektoren \vec{b}_1 , \vec{b}_2 und \vec{b}_3

- a) für kubische fcc Gitter und kubische bcc Gitter,
 b) für das hexagonale primitive Gitter.

11) Ewald-Konstruktion

Diskutieren Sie qualitativ anhand der Ewald-Konstruktion, welche Art von Interferenzmuster bei der Beugung von monochromatischem Licht an einem linearen Punkt- bzw. Strichgitter zu erwarten sind.

12) Brioullin-Zonen im reziproken Gitter

Konstruieren Sie für ein zweidimensionales, einfach rechteckiges Gitter mit $\vec{a}_2 = 2\vec{a}_1$ die ersten vier Brioullin-Zonen.

13) Laue Aufnahme

Schätzen Sie die maximal mögliche Anzahl von Interferenzmaxima einer Laue-Aufnahme ab, wenn die Spannung der benutzen Röntgenröhre 60 kV beträgt und der Kristall ein einfach kubisches Gitter mit einer Gitterkonstante von 0.2 nm besitzt (die Röntgenröhre produziere ein kontinuierliches Bremsstrahlungsspektrum).

14) Bindungsenergie

- a) Zeigen Sie, dass für ein Potential der Form $U(R) = -\frac{A}{R^m} + \frac{B}{R^n}$ nur dann eine stabile Gleichgewichtslage erreicht wird falls $n > m$.
- b) Für eine reine Van-der-Waals Anziehung schreibt man das Potential oft als

$$U(R) = 4\varepsilon \left[\left(\frac{\sigma}{R} \right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{R} \right)^6 \right].$$

Wie gross sind die Bindungsenergie E_B und der Gleichgewichtsabstand R_0 ?

- c) Berechnen Sie den Effekt der thermischen Ausdehnung, $\Delta R_0(T)/R_0$, auf eine lineare Kette von Atomen mit dem Potential von Teilaufgabe b). Nehmen Sie dazu an, die thermische Energie $k_B T \ll E_B$ erlaubt eine Bewegung der Atome um die Gleichgewichtslage und überlegen Sie sich, innerhalb welcher Grenzen das Atom schwingen kann. Bestimmen Sie daraus den mittleren Aufenthaltsort und vergleichen Sie das Resultat mit R_0 .

Hinweis: Benutzen Sie die Entwicklung $1/(1 \pm \varepsilon) \approx 1 \mp \varepsilon + \varepsilon^2 + \dots$ bis zur 2. Ordnung, sowie $\sqrt[n]{1 + \varepsilon} \approx 1 + \varepsilon/n + \dots$ für $\varepsilon \rightarrow 0$.

15) Madelung-Konstante

Berechnen Sie die Madelung-Konstante für eine unendliche lineare Ionenkette mit abwechselungsweise einfach positiv und negativ geladenen Ionen mit konstantem Abstand.

16) Elastische Wellen in Gittern und in kontinuierlichen Medien

In kontinuierlichen Medien lautet die 1-D Wellengleichung $\frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial x^2}$, mit Schallgeschwindigkeit $v = \sqrt{E/\rho}$, Elastizitätsmodul E und Dichte ρ . Für eine lineare Atomkette mit Atomabstand a , Massen m und Federkonstanten C erhielten wir $m \frac{\partial^2 \xi_n}{\partial t^2} = C(\xi_{n+1} + \xi_{n-1} - 2\xi_n)$. Zeigen Sie, dass im Grenzfall für kontinuierliche Medien $\lambda \gg a$ diese Bewegungsgleichung in die 1-D Wellengleichung übergeht. Wie gross wird E , ausgedrückt durch C , m und a ? (nehmen Sie $A = a^2$ als Querschnittsfläche des linearen Mediums)

17) Lineare Atomkette mit zweiatomiger Basis

Gegeben sei eine NaCl-Kette mit der Gitterkonstanten $a = 0.56$ nm (überlegen Sie sich, ob diese mit dem Na-Cl Atomabstand identisch ist!).

a) Schätzen Sie aus dem Resultat aus Aufgabe 16 die Federkonstante C ab, wenn $E = 40$ GPa und die Kette zunächst als einatomig mit Atomabstand $a/2$ aufgefasst wird.

b) Wie gross wird die Schallgeschwindigkeit für kleine Frequenzen? Wie gross wird die maximale mögliche Schwingungskreisfrequenz? Wie gross wird die Breite des verbotenen Schwingungsbereichs (ausgedrückt in eV mit $E = \hbar\omega$)?

18) Lineare Atomkette mit verschiedenen Federkonstanten

Berechnen Sie für eine lineare Kette identischer Atome der Masse m die Dispersionsrelation $\omega(k)$, falls der Atomabstand $d = a/2$ beträgt und sich die Federkonstanten C_1 und C_2 abwechseln (die Einheitszelle mit 2 identischen Atomen hat also die Gitterkonstante a). Zeichnen Sie $\omega(k)$ für $C_1/C_2 = 1.0, 0.6, 0.3$ und 0.1 .

19) Akustische und optische Schwingungen in 2D

Skizzieren Sie longitudinal akustische und optische (LA und LO) bzw. transversal akustische und optische (TA und TO) Schwingungen für eine 2-dimensionale NaCl-Struktur der Gitterkonstanten a . Der Wellenvektor mit $\lambda = 4a$ sei in der $[1\ 0]$ Richtung.

20) Zustandsdichte für kontinuierliche Medien

Wie sieht die Zustandsdichte für Eigenschwingungen in einem linearen kontinuierlichen Medium (z.B. langer homogener Stab) mit N Atomen und der Länge L aus, wenn die Schallgeschwindigkeit konstant ist und nur ein transversaler Schwingungsmodus möglich ist? Bestimmen Sie dazu zunächst die möglichen k -Werte und überlegen Sie sich, was in einem realen Material k bzw. die Schwingungsfrequenz ω nach oben begrenzt.

Vergleichen Sie das Resultat grafisch mit der Zustandsdichte für eine einatomige Kette aus der Vorlesung.

21) Zustandsdichte bei 2-atomiger Basis

In der Vorlesung wurde die Zustandsdichte $\rho(\omega)$ für Eigenschwingungen einer zweiatomigen Kette ohne Rechnung skizziert. Wie genau divergiert $\rho(\omega)$ für $k \rightarrow 0$ für den optischen Zweig? Verwenden Sie dazu das Resultat aus der Vorlesung,

$$\omega_{\pm}^2 = \frac{C}{\mu} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4\mu^2 \sin^2(ka/2)}{m_1 m_2}} \right) \quad \text{mit} \quad \frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}.$$

Benutzen Sie dazu geeignete Entwicklungen für $\sqrt{1+x}$ und $\sin(x)$.

22) Inelastische Streuung von Licht an Phononen

In der Vorlesung wurde ein Energie-Impulsschema gezeigt, bei dem die inelastische Streuung von Neutronen an Phononen veranschaulicht wurde. Zeichnen Sie ein analoges, qualitativ korrektes Schema für die inelastische Streuung von *Licht* an Phononen. Achten Sie dabei auf ein physikalisch sinnvolles Verhältnis von Phononenfrequenzen/-impulsen zu den zugehörigen Lichtfrequenzen/-impulsen. Welche Bedingung muss ein Festkörper erfüllen, damit dessen Phononen besonders effizient Licht absorbieren, und für welche Lichtwellenlängen geschieht dies typischerweise?

23) Anzahl Phononen in einem Festkörper

Wie viele Phononen besetzen eine einzelne Gitterschwingung der Kreisfrequenz ω_0 mit i) $\omega_0 = 10^4 \text{ s}^{-1}$ und ii) $\omega_0 = 10^{13} \text{ s}^{-1}$, bei $T = 0.1 \text{ K}, 1 \text{ K}, 10 \text{ K}, 100 \text{ K}, 1000 \text{ K}$?

24) Debye-Gesetz in 1D und 2D

a) Leiten Sie einen Ausdruck für die Phononenzustandsdichten $\rho(\omega)$ je für eine 1D Kette und ein 2D Gitter mit N identischen Atomen bei gegebenen konstanten Schallgeschwindigkeiten c und Teilchendichten N/L bzw. N/L^2 für periodische

Randbedingungen her (1D: nur longitudinale Schwingungen; 2D: nur je eine longitudinale und eine transversale Schwingungsmöglichkeit). Wie gross wird jeweils die maximale Schwingungsfrequenz?

b) Wie hängen die spezifischen Wärmen für die 1D Kette und das 2D Gitter bei tiefen Temperaturen qualitativ von T ab (ohne Berechnung der Vorfaktoren)? Benutzen Sie dazu den Ausdruck aus der Vorlesung für die mittlere Energie einer Eigenschwingung,

$$\bar{E}_\omega = \frac{\hbar\omega}{\exp(\hbar\omega/k_B T) - 1}.$$

25) Debyetemperatur von festem Argon

Bestimmen Sie aus den gemessenen Daten der spezifischen Wärme von Argon (siehe Fig 1) die Debyetemperatur Θ_D resp. die Debyefrequenz ω_D . Die Dichte von festem Argon beträgt 1.8 g/cm^3 . Wie gross sind Schallgeschwindigkeit und Elastizitätsmodul? Weshalb ist Θ_D wohl vergleichsweise klein, verglichen mit anderen Festkörpern?

26) Einstein-Modell der spezifischen Wärme

Im Einstein Modell der spezifischen Wärme eines Festkörpers wird nur eine einzige mögliche Schwingungsfrequenz ω_E angenommen. Welchen Vorfaktor ρ_0 muss die entsprechende Zustandsdichte $\rho(\omega) = \rho_0 \delta(\omega - \omega_E)$ haben? Welches wäre eine vernünftige Schätzung für ω_E wenn ω_D gegeben ist? Skizzieren Sie $C_v(T)$ mit dieser Schätzung, im Vergleich mit der spezifischen Wärme aus der Debye-Theorie (siehe Fig. 2).

27) Thermische Leitfähigkeit von LiF

Bestimmen Sie aus den Materialeigenschaften von LiF die thermische Leitfähigkeit als Funktion der Temperatur für $T \rightarrow 0$ und vergleichen Sie das Resultat für eine Kristallgrösse von 1.06 mm mit den Literaturwerten (siehe Fig. 3). Benutzen Sie die dafür unter anderem die Formel für die Schallgeschwindigkeit in Festkörpern $c_s = \sqrt{E/\rho}$, mit dem Elastizitätsmodul E und der Dichte ρ .

28) 1D und 2D Metalle

Bestimmen Sie die elektronischen Zustandsdichten $D(E)$ und entsprechende Ausdrücke für die Fermi-Grenzenergie für ein- und zweidimensionale freie Elektronengase mit den Elektronendichten $n = N/L$ resp. $n = N/L^2$.

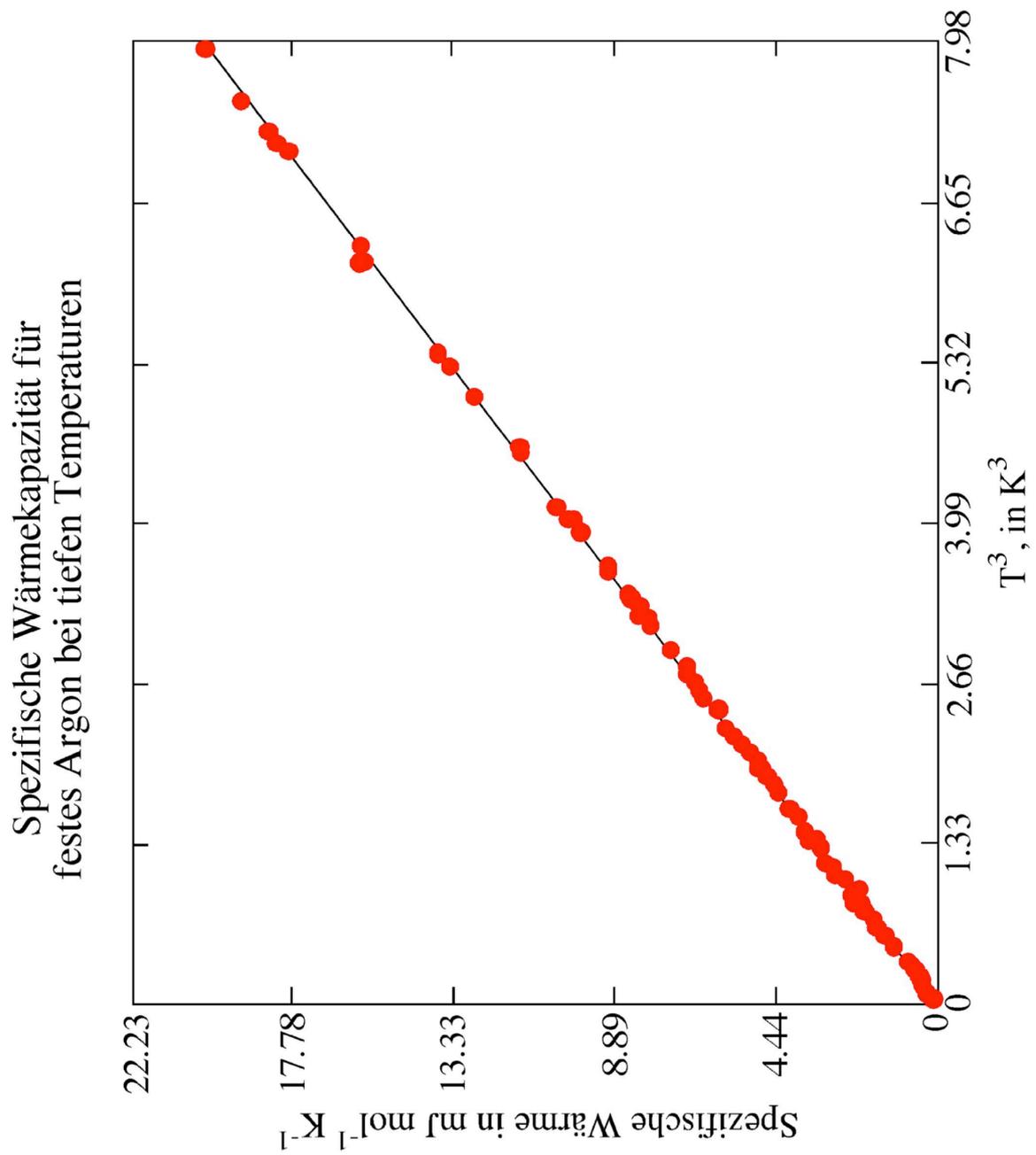


Fig. 1: Gemessenen Daten der spezifischen Wärme von Argon

Spezifische Wärme nach der Debye Theorie

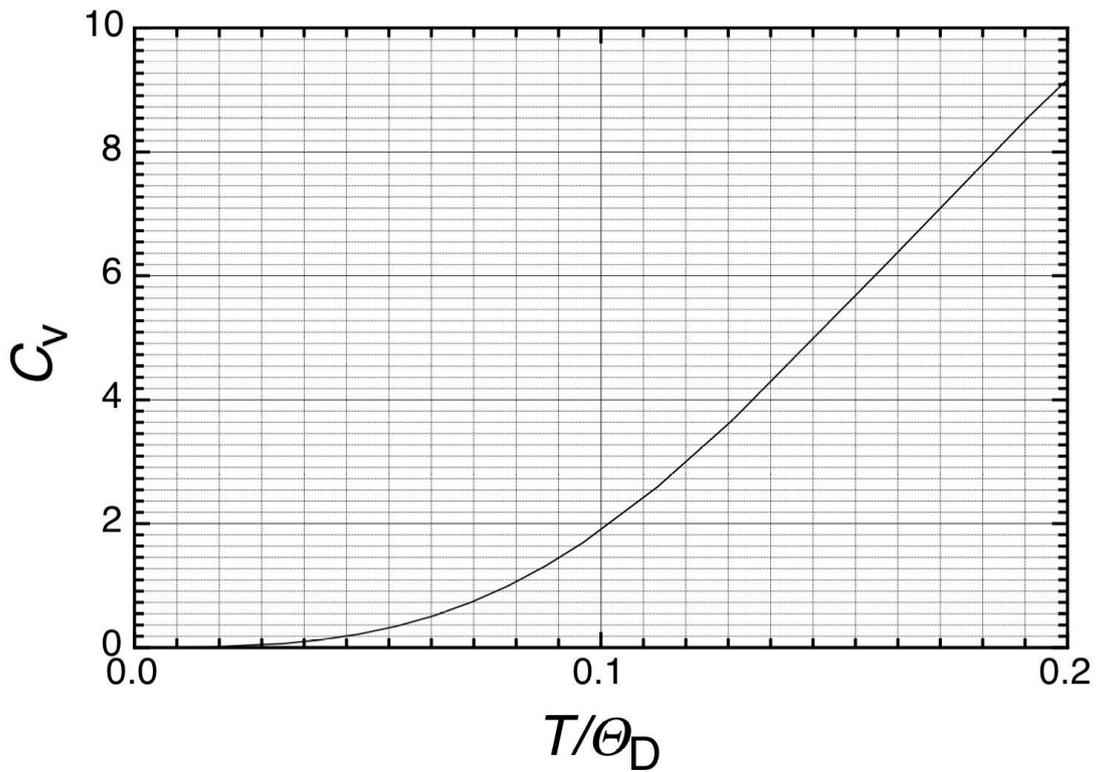
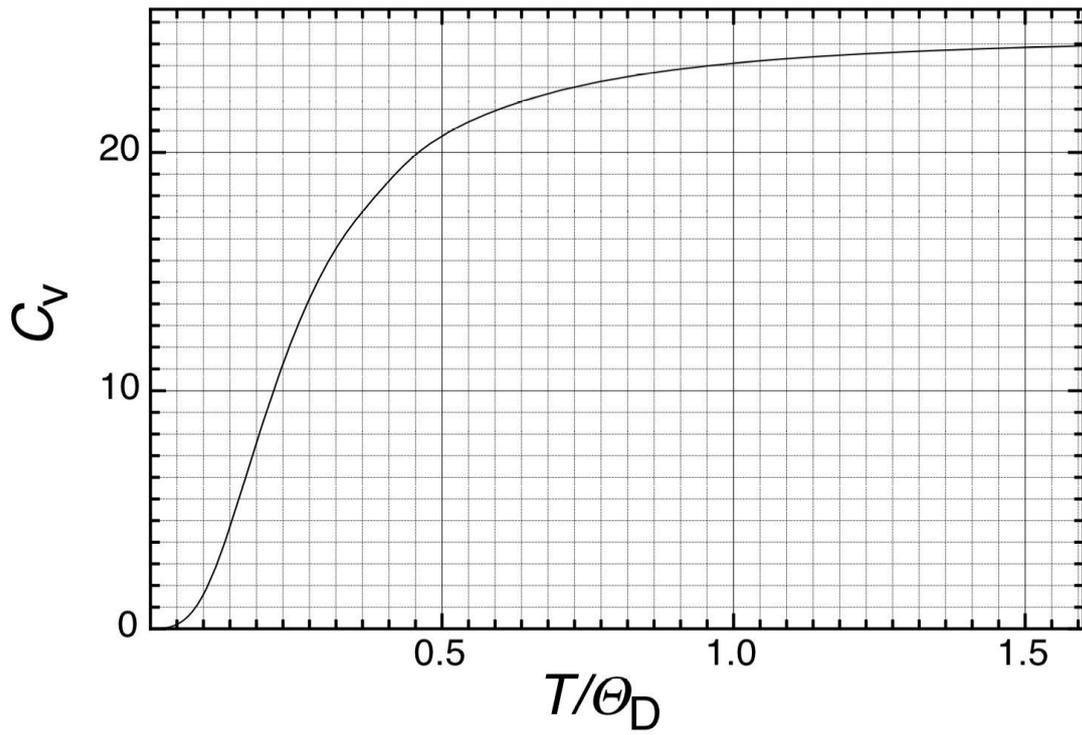


Fig. 2: Spezifische Wärme aus der Debye-Theorie

Chemical Formula	LiF
Crystal Class	Cubic
Lattice Constant, Å	4.03
Molecular Weight	25.94
Density, g/cm ³ (20 °C)	2.60
Reflection Loss, % for two surfaces at 4 μm	4.4
Dielectric Constant for 10 ² -10 ¹⁰ Hz at 298 K	9.0
Melting Temperature, K	1140
Thermal Conductivity, W/(m K) at 314 K	11.3
Thermal Expansion, 1/K at 300 K	34.4 x 10 ⁻⁶
Specific Heat, cal/(g K) at 283 K	0.37
Debye Temperature, K	732
Bandgap, eV	13.6
Solubility, g/100 g H ₂ O at 291 K	0.27
Knoop Hardness, kg/mm ²	100
Young's Modulus, GPa	64.77
Apparent Elastic Limit, MPa	11.2
Shear Modulus, GPa	55.12
Bulk Modulus, GPa	62.0
Poisson Ratio	0.326

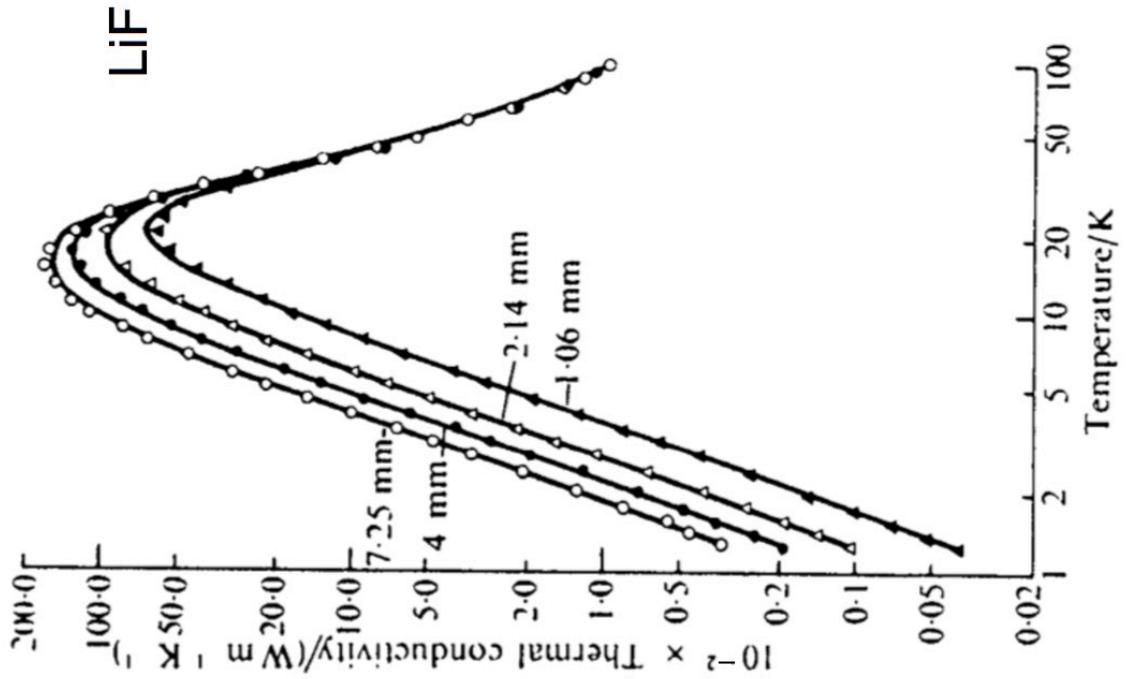


Fig. 3: Materialeigenschaften von LiF

29) Fermi-Gase Na, ${}^3\text{He}$, Neutronen

Berechnen Sie die Fermi-Grenzenergie (in eV), die Fermi-Temperatur und die Fermi-Geschwindigkeit von a) Natriummetall ($\rho = 0.97\text{g/cm}^3$, $m_{\text{mol}} = 23\text{ g/Mol}$), b) flüssigem ${}^3\text{He}$ (Dichte $\rho = 82\text{ mg/cm}^3$, $m_{\text{mol}} = 3\text{ g/Mol}$), und c) eines Neutronensterns mit 1.5 Sonnenmassen und 15 km Durchmesser (ohne relativistische Effekte).

30) Mittlere Energie, Druck und Kompressibilität des Elektronengases

- Bestimmen Sie die mittlere Energie der Elektronen im freien Elektronengas bei $T = 0$, ausgedrückt durch die Fermi-Energie.
- Bestimmen Sie den Elektronendruck im freien Elektronengas bei $T = 0$, wobei Sie benutzen können dass $p = -(\partial U / \partial V)_N$ (Überzeugen Sie sich zunächst, dass diese Beziehung aus der Thermodynamik für ideale Gase bei $T > 0$ überhaupt erfüllt ist).
- Bestimmen Sie die Volumen-Kompressibilität ε des freien Elektronengases bei $T = 0$ und ausgedrückt durch p , wobei $\varepsilon = -(1/V)(\partial V / \partial p)_N$.
- Berechnen Sie die Elektronendruck und Kompressibilität von Li-Metall ($\rho = 0.534\text{g/cm}^3$, $m_{\text{mol}} = 6.94\text{ g/Mol}$), und vergleichen Sie ε mit der gemessenen Kompressibilität von $\varepsilon \approx 9 \times 10^{-11}\text{ Pa}^{-1}$.

31) Chemisches Potential für ein 2D-Elektronengas

Berechnen Sie das chemische Potential $\mu(T)$ für ein zweidimensionales Gas von Elektronen mit der Elektronenflächendichte $n = N/L^2$. Skizzieren Sie $\mu(T)$ und vergleichen Sie den Grenzfall $T = 0$ mit dem Resultat für die Fermi-Grenzenergie aus Aufgabe 28.

32) Chemisches Potential bei diskreten Zuständen

Ein System, das nur die (nicht-entarteten) diskreten Energiezustände E_1 und $E_2 > E_1$ annehmen kann, werde mit Fermionen besetzt.

- Wie sieht die Zustandsdichte für dieses System aus?
- Wie gross ist das chemische Potential μ für $T = 0$, falls genau ein Fermion das System besetzt? Was kann man über μ für $T = 0$ aussagen, falls genau zwei Fermionen das System besetzen?
- Wie gross wird $\mu(T)$ für zwei Fermionen und $T > 0$?

33) Spezifische Wärme von Kupfer

Versuchen Sie, aus den vorliegenden Messdaten für Kupfer (siehe Tabelle 1, $\rho = 8.94 \text{ g/cm}^3$, $m_{\text{mol}} = 63.55 \text{ g/Mol}$) die Elektronenmasse zu bestimmen. Um wie viel weicht der erhaltene Wert vom Literaturwert für freie Elektronen ab?

T (K)	C_V ($\text{mJ mol}^{-1} \text{K}^{-1}$)
0.25	0.17
0.50	0.35
0.75	0.54
1.00	0.74
1.25	0.96
1.50	1.21
1.75	1.47
2.00	1.78
2.25	2.11
2.50	2.50
2.75	2.91
3.00	3.35
3.25	3.91
3.50	4.46
3.75	5.15
4.00	5.87
4.50	7.49

Table 1: Spezische Wärme von Kupfer.

34) Driftgeschwindigkeit, Fermi-Geschwindigkeit und Restwiderstand in Kupfer

a) Wie gross ist die Driftgeschwindigkeit der Leitungselektronen in Kupfer ($\rho = 8.94 \text{ g/cm}^3$, $m_{\text{mol}} = 63.55 \text{ g/Mol}$, 1 Leitungselektron pro Atom), wenn durch einen Draht von 1 mm Durchmesser ein Strom von 10 A geleitet wird? Wie gross ist die Fermi-Geschwindigkeit im Vergleich dazu?

b) Wie gross ist die mittlere freie Weglänge in Kupfer bei Zimmertemperatur mit einem spezifischen Widerstand von $1.7 \times 10^{-8} \Omega \text{m}$?

c) Kupfer mit 3.3 Atomprozenten Nickel als Verunreinigung besitzt einen Restwiderstand von ca. $4 \times 10^{-9} \Omega \text{m}$. Wie gross ist der mittlere Abstand der Ni-Atome im Vergleich zur mittleren freien Weglänge der Elektronen bei $T = 0$?

35) Hall-Effekt

Wie gross wird die maximal messbare Hall-Spannung in einer 10 cm langen, 0.1 mm dünnen und 1 mm breiten Kupferfolie, wenn ein angelegter Strom 1 A entlang der Längsachse fliesst und das zur Verfügung stehende Magnetfeld 5 T beträgt? Wie genau hängt diese Spannung bei gegebenem Magnetfeld und Messstrom von der Geometrie der Folie ab?

Wie ändert sich die Hall-Spannung, wenn die Folie bei fest angelöteten Strom- und Spannungskontakten um ihre 3 Symmetrieachsen um jeweils 90 Grad kontinuierlich gedreht wird?

36) Faraday-Waage zur Messung der magnetischen Suszeptibilität

Wie gross ist die dimensionslose (Volumen-)Pauli-Spinsuszeptibilität von Kupfer, $\chi_{\text{Pauli}} = M/H$? Ein kleines Stück Kupfer wird in ein inhomogenes Magnetfeld mit einem konstanten Feldgradienten $dB/dz = 10 \text{ T/m}$ und einem mittleren Magnetfeld von $B = 2 \text{ T}$ gebracht. Wie gross ist die Kraftwirkung auf Grund der freien Elektronen im Vergleich zur Gewichtskraft des Kupfers? *Hinweis zur Erinnerung:* Die

magnetische Feldenergiedichte ist $1/2BH$, die Kraft der Gradient der potentiellen Energie.

37) Bahnen im Magnetfeld

a) Wie gross ist der klassische Bahnradius von Elektronen an der Fermigrenze für Kupfer in einem Magnetfeld von $B = 5 \text{ T}$ ($\rho = 8.94 \text{ g/cm}^3$, $m_{\text{mol}} = 63.55 \text{ g/Mol}$, 1 Leitungselektron pro Atom)? Wie gross ist die entsprechende Zyklotron-Kreisfrequenz?

b) Wie gross darf der Restwiderstand sein, damit im Mittel gerade noch ein ganzer ungestörter Umlauf ohne Stösse an Verunreinigungen möglich ist?

38) De Haas-van Alphen Effekt in Gold

Schätzen Sie die Fermienergie von Gold (in eV) auf Grund der Oszillation der Pauli-Spinsuszeptibilität im Magnetfeld ab (siehe Fig. 4; *Hinweis*: die Oszillation mit der kleineren Periode entspricht der grössten Extremalbahn, die als Umfang einer Fermi-Kugel angesehen werden kann). Vergleichen Sie das Resultat mit dem Literaturwert $E_F = 5.51 \text{ eV}$. Woher muss die Periodizität mit der längeren Periode stammen?

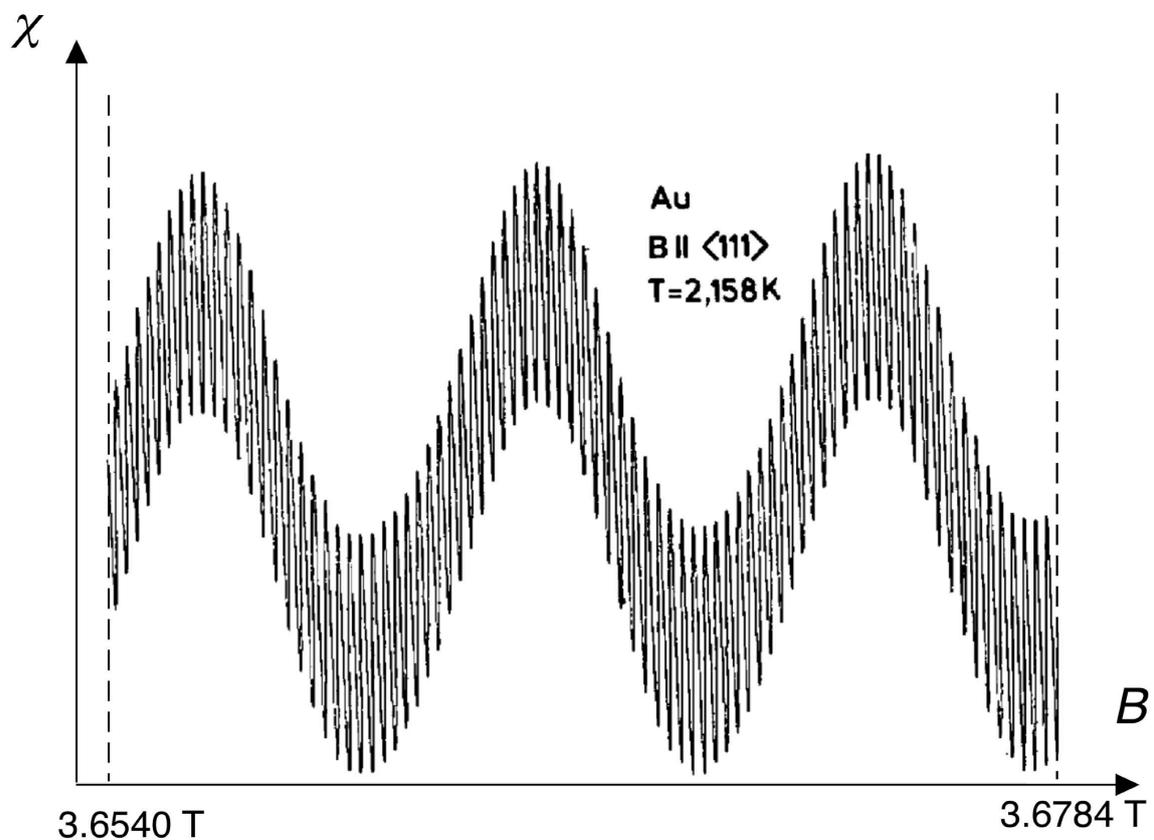
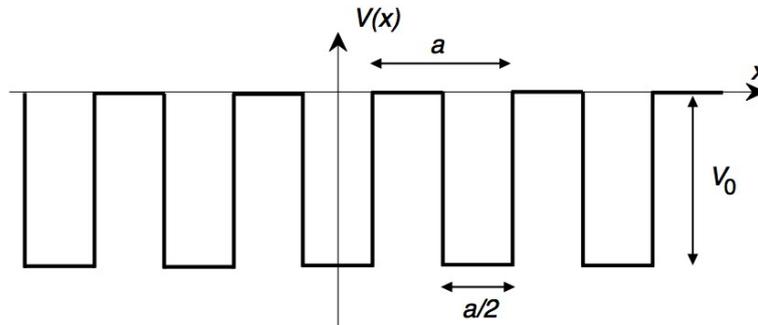


Fig. 4: Pauli-Spinsuszeptibilität von Gold im Magnetfeld

39) Energielücken bei periodischen Potentialen

Wir betrachten als Modell ein periodisches 1D-Kastenpotential der Kastenbreite $a/2$ und Tiefe V_0 mit Kastenabstand a (vereinfachtes Kronig-Penney Modell).



Wie gross werden die Energielücken $E_{g,n}$, welche die Energiebänder n und $n+1$ trennen?

40) Fermi-Linie und reduziertes Zonenschema in 2D

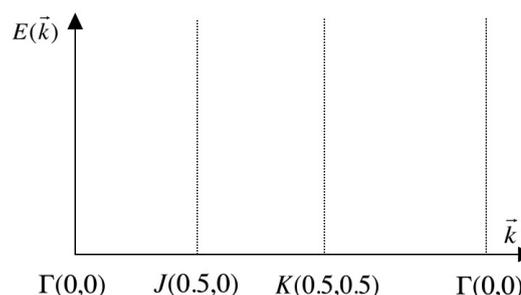
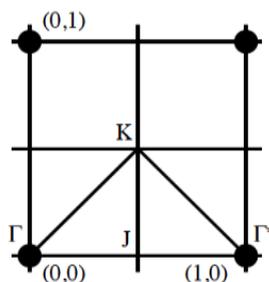
a) Ein kubisches Gitter der Gitterkonstanten a in zwei Dimensionen bestehe aus Atomen, die jeweils 2 Elektronen beisteuern. Wie gross wird der Betrag des Fermi-Wellenvektors k_F in Einheiten von π/a ?

b) Skizzieren Sie für dieses Gitter, wie jeweils das reduzierte und das periodische Zonenschema aussehen. Machen Sie getrennte Skizzen für freie Elektronen und für Elektronen, die sich in einem schwachen periodischen Potential befinden.

41) Freie Elektronen im quadratischen Gitter

Wir betrachten im reziproken Gitter eines quadratischen Gitters mit Gitterkonstanten a die Wellenvektoren $\vec{k}_\Gamma = 2\pi/a (0,0)$, $\vec{k}_J = 2\pi/a (0.5,0)$ und $\vec{k}_K = 2\pi/a (0.5,0.5)$. Skizzieren Sie $E(\vec{k})$ für die untersten beiden Energiebänder freier Elektronen entlang der Linie $\Gamma - J - K - \Gamma$. Wie sähe eine analoge Skizze für die Linie $\Gamma^* - J - K - \Gamma^*$ mit $\vec{k}_{\Gamma^*} = 2\pi/a (1,0)$ aus?

Fakultativ: Was ändert sich in einem schwachen periodischen Potential?



42) Effektive Masse bei Zyklotron-Resonanz

Die gemittelte effektive Masse m^* für die Leitungselektronen im Halbleiter InSb beträgt $0.014 m_e$. Wie gross muss ein Magnetfeld sein, damit die Leitungselektronen durch Mikrowellen mit einer Wellenlänge von 3 cm zur Zyklotronresonanz angeregt werden?

43) Bandüberlappung

Die überlappenden Energiebänder einer Verbindung seien in der Nähe von $E_1(0)$ bzw. $E_2(k_0)$ wie folgt gegeben:

$$E_1(k) = E_1(0) - \frac{\hbar^2 k^2}{2m_1^*} \quad \text{und} \quad E_2(k) = E_2(k_0) + \frac{\hbar^2 (k - k_0)^2}{2m_2^*}.$$

- Skizzieren Sie $E(k)$ für $m_1^* > m_2^*$ und $E_1(0) > E_2(k_0)$ für ein $k_0 > 0$, für das sich $E_1(k)$ und $E_2(k)$ nicht schneiden.
- Wir nehmen an, das Material wäre ein Isolator bzw. Halbleiter, wenn das Band $E_2(k)$ gar nicht vorhanden wäre. Was können Sie über die Besetzung des Bandes $E_1(k)$ unter dieser Annahme aussagen? Skizzieren Sie, wie die Bänder tatsächlich für $T = 0$ gefüllt sein müssen, wenn beide Energiebänder vorhanden sind.
- Welche Bedingung muss für die Anzahl Löcher bzw. Elektronen in den beiden Bändern gelten?
- Berechnen Sie daraus, wo die Fermi-Energie E_F für $T = 0$ liegen muss, indem Sie die Zustandsdichten für beide Bänder betrachten und diese in Beziehung zur Anzahl Löcher bzw. Elektronen setzen.

44) Bloch-Oszillationen

Ein Energieband sei in 1D durch den Ausdruck $E(k) = \frac{\Delta}{2} [1 - \cos(ka)]$ gegeben.

- Skizzieren Sie $E(k)$ und berechnen Sie die effektiven Massen bei $k = 0$ und $k = \pi/a$ in Vielfachen der Elektronenmasse für $\Delta = 1$ eV und $a = 0.3$ nm.
- Wie lautet die Bewegungsgleichung für $k(t)$ in einem konstanten elektrischen Feld E_0 , und wie ändert sich die Energie der Elektronen als Funktion der Zeit?
- Wie ändert sich die Gruppengeschwindigkeit als Funktion der Zeit, und welcher Art von Bewegung im Ortsraum entspricht dies? Vergleichen Sie dieses Resultat für $E_0 = 1000$ V/m mit der mittleren freien Weglänge von Cu ($l \approx 3$ μm bei $T = 300$ K). Was ist die Bedingung für l , damit die gefundene Lösung überhaupt realisiert werden kann?

45) Magnetisierungskurven

In der Vorlesung haben wir die Magnetisierung für ein einzelnes Elektron berechnet, welches allein einen Elektronenzustand besetzt, und erhielten (pro Elektron) den Wert $\mu_B \tanh(\mu_B B / k_B T)$. Für allgemeine Werte für den Gesamtdrehimpuls J lautet die entsprechende Beziehung

$$g\mu_B J \left\{ \frac{2J+1}{2J} \coth\left(\frac{2J+1}{2J} g\mu_B J B / k_B T\right) - \frac{1}{2J} \coth\left(\frac{1}{2J} g\mu_B J B / k_B T\right) \right\}.$$

- Zeigen Sie, dass das in der Vorlesung erhaltene Resultat dennoch korrekt ist.
- Um welchen Faktor weicht der Vorfaktor C des Curie-Gesetzes C/T für hohe Temperaturen und kleine Magnetfelder von dem Wert ab, den wir für ein einzelnes Elektron erhalten hatten? *Hinweis: Benutzen Sie die Entwicklung $\coth(x) \approx 1/x + x/3$ für kleine Werte von x .*

46) Entmagnetisierungsfaktor

In Experimenten zur Messung der magnetischen Suszeptibilität $\chi = M/H$ bezeichnen wir H_{ext} als das tatsächlich im Experiment angelegte äussere Magnetfeld, wie Sie es z.B. aus Formeln für stromdurchflossene Magnetspulen berechnen würden. Auf Grund der induzierten Magnetisierung M in der untersuchten Probe endlicher Ausdehnung entsteht in erster Näherung ein magnetisches Dipolfeld um diese Probe herum, welches das äussere Magnetfeld um $-NM$ abschwächt. N nennt man „Entmagnetisierungsfaktor“, der geometrieabhängig ist (siehe Tabelle unten).

Mit anderen Worten, die Probe „spürt“ ein „effektives“ Magnetfeld $H_{\text{eff}} = H_{\text{ext}} - NM$. Eine Messapparatur misst aber die tatsächliche Magnetisierung M , unabhängig davon wie sie zustande kommt. Die gemessene scheinbare Suszeptibilität $\chi^* = M/H_{\text{ext}}$ weicht dann natürlich von der tatsächlichen magnetischen Suszeptibilität $\chi = M/H_{\text{eff}}$ ab.

- Finden Sie eine Beziehung, wie Sie χ aus χ^* erhalten können, falls der Entmagnetisierungsfaktor N bekannt ist.
- Welchen Wert χ^* würden Sie ungefähr erhalten, wenn Sie einen plättchenförmigen Kristall eines Hochtemperatur-Supraleiters im supraleitenden Zustand messen, der eine Dicke von ≈ 0.2 mm und einen Durchmesser von 2 mm aufweist, und das Magnetfeld senkrecht zur Ebene des Plättchens angelegt ist?

Hinweis: In der untenstehenden Tabelle finden Sie Werte von N für Zylinder mit Verhältnis $\gamma = \text{Länge/Durchmesser}$ („ N_m “) resp. für Rotations-Ellipsoide mit Verhältnis der Halbachsen $a = b$ zu c , $\gamma = c/a$ („ N “), wobei das Magnetfeld parallel jeweils zur Symmetrieachse steht.

EXACT FLUXMETRIC AND MAGNETOMETRIC DEMAGNETIZING FACTORS N_f
AND N_m FOR $\chi = 0^\circ$

γ	$N_m(0)$	$N_f(0)$	N
0.00001	0.9999	0.9999	1.0000
0.0001	0.9994	0.9993	0.9998
0.001	0.9950	0.9949	0.9984
0.01	0.9650	0.9638	0.9845
0.02	0.9389	0.9364	0.9694
0.03	0.9161	0.9124	0.9546
0.04	0.8954	0.8905	0.9402
0.05	0.8764	0.8703	0.9262
0.06	0.8586	0.8513	0.9125
0.07	0.8419	0.8333	0.8991
0.08	0.8261	0.8163	0.8860
0.09	0.8110	0.8001	0.8733
0.10	0.7967	0.7845	0.8608
0.12	0.7698	0.7553	0.8367
0.14	0.7450	0.7281	0.8137
0.16	0.7219	0.7027	0.7917
0.18	0.7004	0.6789	0.7706
0.20	0.6802	0.6565	0.7505
0.22	0.6611	0.6352	0.7312
0.24	0.6432	0.6151	0.7126
0.26	0.6262	0.5960	0.6948
0.28	0.6101	0.5778	0.6778
0.30	0.5947	0.5604	0.6614
0.32	0.5801	0.5438	0.6456
0.34	0.5662	0.5279	0.6304
0.36	0.5530	0.5127	0.6158
0.38	0.5403	0.4982	0.6017
0.40	0.5281	0.4842	0.5882
0.45	0.4999	0.4516	0.5563
0.50	0.4745	0.4221	0.5272
0.55	0.4514	0.3952	0.5005
0.60	0.4303	0.3705	0.4758
0.65	0.4110	0.3480	0.4531
0.70	0.3933	0.3273	0.4321
0.75	0.3770	0.3082	0.4126
0.80	0.3619	0.2905	0.3944
0.90	0.3349	0.2592	0.3618
1.0	0.3116	0.2322	0.3333
1.1	0.2911	0.2089	0.3083
1.2	0.2731	0.1886	0.2861
1.3	0.2572	0.1710	0.2664
1.4	0.2429	0.1555	0.2488
1.6	0.2186	0.1298	0.2187
1.8	0.1986	0.1096	0.1941
2.0	0.1819	0.09351	0.1736
2.5	0.1501	0.06544	0.1351
3.0	0.1278	0.04799	0.1087
3.5	0.1112	0.03653	0.08965
4	0.09835	0.02865	0.07541
5	0.07991	0.01889	0.05582
6	0.06728	0.01334	0.04323
7	0.05809	0.009904	0.03461
8	0.05110	0.007635	0.02842
9	0.04562	0.006061	0.02382
10	0.04119	0.004927	0.02029
20	0.02091	0.001245	0.006749
50	0.008438	0.0001999	0.001443
100	0.004232	0.00004999	0.0004299
200	0.002119	0.00001250	0.0001248
500	0.0008483	0.00000200	0.00002363
1000	0.0004243	0.00000050	0.000006601